Programme de Colle n°13
(Du 5 au 09 janvier 2026)

Equation différentielle

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Arithmétique

c) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM. Algorithme d'Euclide. Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini.	

Remarque : Nous n'avons pas encore vu officiellement le calcul du PPCM et du PGCD par la décomposition en nombres premiers. Cependant la plupart des élèves connaissent cela depuis le collège, et l'on revu en terminale. Il sera donc accepter de l'utiliser. De plus, même si les congruences ne sont pas officiellement au programme, elles peuvent être utilisées. Il est cependant demander aux élèves qui l'utilisent de bien comprendre les propriétés d'addition, de multiplication… Un colleur est susceptible de demander à l'étudiant de justifier telle ou telle propriété des congruences (passage à la somme, au produit…). Gauss et Bézout ne sont pas au programme (ce que je regrette amèrement… !).

Questions de cours

Propriété I.b.1 : Soit $a \in \mathcal{C}^0(I)$. Les solutions de $(E_0): y' + ay = 0$ sont :

$$f : t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$$

Où A est une primitive de a sur I.

Propriété III.a.1 : Soit $(E): ay'' + by' + cy = f(t)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0).

Propriété I.1 : On a les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Propriété III.b.1 (Lemme d´Euclide) : Soient a et b deux entiers non nuls. On pose la division euclidienne de a par b : a=bq+r. Alors on a :

$$a \wedge b = b \wedge r$$

Propriété III.d.3 : On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, (a \vee b) \times (a \wedge b) = a \times b$$

Infinitude des nombres premiers

Exercices du type

Application II.b.4 : Résoudre : $y' + y = 4\mathrm{ch}(t)$

Exemple III.a.2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E): 2y'' + 2y' - 12y = 4 \qquad (E): y'' - 4y' + 4y = t^2 - 8t + 1$$

$$(E_2): y'' - 4y' + 4y = (t+3)e^{2t}$$

Exercice A1 : Démontrer que :

$$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice A.4 : Soit $(a_0; a_1; \dots; a_n) \in [\![0; 9]\!]^{n+1}$. On pose :

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

Démontrer que :

$$3 | \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \Leftrightarrow 3 | \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Exercice A.7 : Montrer que :

$$\forall n \geq 2, 10 | \left(2^{2^n} - 6\right)$$

Exercice B.1 : Calculer $9100 \wedge 1848$ et $9100 \vee 1848$

Exercice B.6 : Chercher les couples d'entiers (a, b) tels que :

$$\begin{cases} a \wedge b = 42 \\ a \vee b = 1680 \end{cases}$$