Correction DM n°4

Exercice 1 : Variation de la constante en dimension 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $(E): y'' + 4y = \tan(t)$

1) Résoudre l'équation homogène. On ne donnera que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose dans toute la suite :

$$y_1: \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(2t) \end{cases} \text{ et } y_2: \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(2t) \end{cases}$$

2) a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \left(\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)\right)^2$. On cherche à trouver une solution particulière à (E) qui vérifie la relation :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases}$$

Montrer si y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) \end{cases}$$

c) En déduire toutes les solutions de (E).

3) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1) On sait que :

$$\mathbf{y'' + 4y = 0 \Longleftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)}$$

2) a) On sait que :

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \Longrightarrow y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$$

De plus si y est solution de (E) on a alors :

$$y'' + 4y = \tan(t)$$

De plus on a :

$$y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \Longrightarrow y'' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 4y = \tan(t) \Longrightarrow \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + 4(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \tan(t)$$
$$\Longrightarrow \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 (y_1'' + 4y_1) + \lambda_2 (y_2'' + 4y_2) = \tan(t)$$

De plus on sait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène donc :

$$y_1'' + 4y_1 = 0 = y_2'' + 4y_2$$

On en déduit donc que :

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t)$$

On en déduit donc que y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\boldsymbol{\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}}$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t)\cos(2t) + \lambda_2'(t)\sin(2t) = 0 \\ -2\lambda_1'(t)\sin(2t) + 2\lambda_2'(t)\cos(2t) = \tan(t) \end{cases}$$

On sait que ce système admet une unique solution si et seulement si :

$$2\cos^2(2t) + 2\sin^2(2t) \neq 0$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2\cos^2(2t) + 2\sin^2(2t) = 1$$

On en déduit donc que le système admet une unique solution, donné par :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\dfrac{\sin(2t)\tan(t)}{2} \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{\cos(2t)\tan(t)}{2} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t) \Longrightarrow -\frac{\sin(2t)\tan(t)}{2} = -\sin^2(t)$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\dfrac{\sin(2t)\tan(t)}{2} \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{\cos(2t)\tan(t)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda_2'(t) = \dfrac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) \end{cases}$$

On sait que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) = -\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2t) - 1)$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \lambda_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t\right) + c}$$

De plus on a :

$$\lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)\tan(t) = \frac{1}{2}(2\cos^2(t) - 1)\tan(t) = \cos(t)\sin(t) - \frac{\frac{1}{2}\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\exists d \in \mathbb{R}, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \lambda_2(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + d}$$

On pose :

$$f: \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(2t)}{2} - t\right)\cos(2t)\right) + \left(-\dfrac{1}{4}\cos(2t) + \dfrac{1}{2}\ln(\cos(t))\right)\sin(2t) \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, f''(t) + 4f(t) = tan(t)$$

Donc f est une solution particulière de (E).
On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, y(t)}$$
$$\boldsymbol{= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t + A\right)\cos(2t)\right) + \left(-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + B\right)\sin(2t)}$$

3) En reprenant les notations de la question précédente on a :

$$y(0) = A = 0$$

De plus on a :

$$y'(0) = \left(-\frac{1}{4} + B\right)2 = 1 \Longrightarrow B = \frac{3}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t\right)\cos(2t) + \left(-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + \frac{3}{4}\right)\sin(2t)}$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos(2t) + \left(\frac{1}{2}\ln(\cos(t)) + \frac{3}{4}\right)\sin(2t)$$

Exercice facultatif : Problème 1 : Irrationnalité de ln(2)

Partie A : Une suite qui converge vers $\boldsymbol{ln}(2)$

Dans toute cette partie on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1}I_{n+1}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Partie B : Critère de d'Alembert

On veut montrer le théorème suivant :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \ avec\ \ell < 1 \Longrightarrow u_n \to 0$$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose de plus que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell\ avec\ 0 \leq \ell < 1$$

1) Démontrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel\ que\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 0 < v_n < 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3) Démontrer que la suite (u_n) converge, puis que sa limite est 0.
4) La réciproque du théorème est-elle vraie ?

Partie C : Irrationalité de ln(2)

On va prouver l'irrationalité de ln(2) en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt$$

1) Calculer J_0 et J_1.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n > 0$$

3) Démontrer que :

$$\forall D \in \mathbb{R}, D^n J_n \to 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2}J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2}J_{n+1}$$

5) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers A_n tel que :

$$J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

6) Montrer que si $D = 2p^3$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n J_n \in \mathbb{N}^*$$

7) En déduire l'irrationalité de $\ln(2)$.

Partie A : Etude d'une intégrale

Dans toute cette partie on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$$

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto \frac{t^n}{1+t} \in \mathcal{C}^0([0;1])$$

Donc f_n admet une primitive donc I_n est bien définie.

2) On a :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{t^0}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln(2)$$

De plus on a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}dt = 1 - \ln(2)$$

3) a) On sait que :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{(1+t)^2 - 2(t+1) + 2}{1+t}dt = \int_0^1 (1+t) - 2 + \frac{2}{1+t}dt$$

On pose $y = 1 + t$

a) Les bornes

$$t = 0 \Longrightarrow y = 1 \text{ et } t = 1 \Longrightarrow y = 2$$

b) Calcul de dt

On sait que $t : y \mapsto y - 1 \in \mathcal{C}^1([1,2])$ et :

$$\frac{dt}{dy} = 1$$

c) On remplace :

$$\int_0^1 (1+t) - 2 + \frac{2}{1+t}dt = \int_1^2 \left(y - 2 + \frac{1}{y}\right)dy$$

b) On a :

$$\int_1^2 \left(y - 2 + \frac{1}{y}\right)dy = [y^2 - 2y + \ln(y)]_1^2 = \ln(2) - 1$$

4) On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\,dt = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt = \ln(2) - (-1)^{n+1}I_{n+1}$$

Partie B : Convergence d'une série

1) a) Enoncer le critère spécial des séries alternées.

b) Démontrer le critère spécial des séries alternées.

C'est du cours !

2) Démontrer, sans utiliser ce qui a été fait dans la partie A, que la série suivante converge :

$$\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0. De plus comme (u_n) est alternée, on en déduit donc que (u_n) vérifie le critère spécial des séries alternées ! Donc $\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ converge.

3) a) Démontrer que :

On sait que :

$$\forall t \in [0;1], 1 \leq 1+t \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \;\Longrightarrow \forall t \in [0;1], 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^{n+1}\,dt$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) D'après la question précédente, on en déduit donc que :

$$\lim_n I_{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

Partie C : Irrationalité de $\ln(2)$

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt$$

1) On a :

$$J_0 = \frac{1}{0!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^0 e^{t\ln(2)}dt = \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)}dt = \frac{1}{\ln(2)}\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\ln(2)}$$

$$J_1 = \frac{1}{1!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^1 e^{t\ln(2)}dt = \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)}dt - \int_{-1}^{1} t^2 e^{t\ln(2)}dt$$

$$= \frac{3}{2\ln(2)} - \left(\left[\frac{t^2}{\ln(2)}2^t\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\ln(2)}\int_{-1}^{1} te^{t\ln(2)}dt\right)$$

$$= \frac{3}{2\ln(2)} - \left(\frac{3}{2\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)}\left(\left[\frac{t}{\ln(2)}2^t\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\ln(2)}\int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)}dt\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\ln(2)}\left(\frac{5}{2\ln(2)} - \frac{2}{\ln^2(2)} \times \frac{3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow J_1 = \frac{5}{\ln^2(2)} - \frac{3}{\ln^3(2)}$$

2) On sait que :

$$\forall t \in]-1;1[, (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} > 0 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt > 0 \Longrightarrow J_n > 0$$

3) On sait que :

$$\forall t \in [-1;1], D^n J_n = \frac{D^n}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt$$

On pose :

$$u_n = \frac{|D|^n}{n!} \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|D|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|D|^n} = \frac{|D|}{n+1} \to 0$$

On en déduit donc d'après le critère de d'Alembert que :

$$\lim_n \frac{|D|^n}{n!} = 0$$

De plus on sait que :

$$\forall t \in [-1;1], 1-t^2 \leq 1 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt \leq \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)} dt = \frac{3}{2\ln(2)}$$

On en déduit donc que :

$$|D^n J_n| \leq \frac{3}{2\ln(2)} |u_n|$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \frac{3}{2\ln(2)} |u_n| = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n D^n J_n = 0$$

4) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n+2} e^{t\ln(2)} dt$$

$$= \frac{1}{(n+2)!} \left(\underbrace{\left[\frac{(1-t^2)^{n+2} e^{t\ln(2)}}{\ln(2)} \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{2(n+2)}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} t(1-t^2)^{n+1} e^{t\ln(2)} dt \right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)!\ln(2)} \left(\underbrace{\left[\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{\ln(2)} \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{1}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n+1} e^{t\ln(2)} dt + \frac{2(n+1)}{\ln(2)} \int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt \right)$$

$$= -\frac{2}{\ln^2(2)} J_{n+1} - \frac{4}{n!\ln^2(2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)(1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt + \frac{4}{n!\ln^2(2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt$$

$$= \frac{-2-4(n+1)}{\ln^2(2)} J_{n+1} + \frac{4}{\ln^2(2)} J_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2} J_{n+1}$$

5) On fait une récurrence double. On pose :

$$\mathcal{P}(n): "J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2} A_n\left(-\frac{p}{q}\right) \right]"$$

Initialisation : $n=0 : J_0=\frac{3}{2\ln(2)}=\left(\frac{q}{p}\right)^1\left[2\times 1-\frac{1}{2}\times 1\right] \Longrightarrow \mathcal{P}(0)$ est vraie avec $A_0(X)=1$

$n=1 : J_1=\frac{5}{\ln^2(2)}-\frac{3}{\ln^3(2)}=\frac{5\ln(2)-3}{\ln^3(2)}=\left(\frac{q}{p}\right)^3\left[2\times(2\ln(2)-2)-\frac{1}{2}(-2\ln(2)-2)\right] \Longrightarrow \mathcal{P}(1)$ est vraie avec $A_1(X)=2X-2$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, On suppose vraie $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k\in[\![0;n+1]\!]$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On sait que :

$$\begin{aligned}
J_{n+2}&=\frac{4q^2}{p^2}J_n-\frac{(4n+6)q^2}{p^2}J_{n+1}\\
&=\frac{4q^2}{p^2}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]-\frac{(4n+6)q^2}{p^2}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+3}\left[2A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right]\\
&=\frac{q^2}{p^2}\left[-(4n+6)\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+3}\left(2A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right)+4\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left(2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right)\right]\\
&=\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+5}\left[2\left(4\left(\frac{p}{q}\right)^2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-(4n+6)A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(4\left(\frac{p}{q}\right)^2A_n\left(-\frac{p}{q}\right)-(4n+6)A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right)\right]\\
&=\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+5}\left[2A_{n+2}\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_{n+2}\left(-\frac{p}{q}\right)\right]
\end{aligned}$$

On pose :

$$A_{n+2}(X)=4X^2A_n(X)-(4n+6)A_{n+1}(X)$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de la récurrence double !

6) On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, A_n(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n \text{ avec } (a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$$

On a alors :

$$q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)=a_0q^{2n+1}+a_1pq^{2n}+\cdots+a_np^nq^{n+1}\in\mathbb{Z}$$

De même on a : $q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\in\mathbb{Z}$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
D^nJ_n=2^np^{3n}J_n&=2^np^{3n}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]\\
&=2^np^{n-1}\left(2q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right)\\
&=p^{n-1}\left(2^{n+1}\underbrace{q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)}_{\in\mathbb{Z}}-2^{n-1}\underbrace{q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\geq 1, (2p^3)^nJ_n\in\mathbb{N}^*$$

7) On sait que :

$$\forall n \geq 1, (2p^3)^n J_n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \forall n \geq 1, (2p^3)^n J_n \geq 1$$

De plus on sait que :

$$\lim_n (2p^3)^n J_n = 0$$

Cela est impossible. Donc $\ln(2)$ est un irrationnel !