Correction DS n°4
PCSI 2024-2025

Exercice 1 : Suite et arithmétique

Dans tout cet exercice on considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 20 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z} \; et \; 2^{n+1} | u_n$$

2) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{cases} x_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n \times \left(1+\sqrt{3}\right) \\ y_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n \times \left(1-\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

3) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \times (x_n + y_n)$$

4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{Z}^2 \; tel \; que \; \begin{cases} x_n = \alpha_n + \sqrt{3}\beta_n \\ y_n = \alpha_n - \sqrt{3}\beta_n \end{cases}$$

5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 - 3\beta_n^2 = -2$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ diviseur commun positif de $\alpha_n \; et \; \beta_n$. Montrer que $d = 1 \; ou \; d = 2$.

7) Déterminer $\alpha_n \wedge \beta_n$.

1) On raisonne par récurrence double. On pose :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{P}(n)} = \; \boldsymbol{2^{n+1} | u_n}$$

Initialisation :

- $n = 0$

$$u_0 = 2 \; et \; 2^{0+1} = 2 | u_0$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- $n = 1$

$$u_1 = 20 = 4 \times 5 \; et \; 2^{1+1} = 4 | u_1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n une entier naturel fixé. On suppose $\mathcal{P}(n) \; et \; \mathcal{P}(n+1)$ vraies. On a alors :

$$\exists (k_n, k_{n+1}) \in \mathbb{Z}^2, tel \; que \; u_n = 2^{n+1}k_n \; et \; u_{n+1} = 2^{n+2}k_{n+1}$$

On a alors :

$$u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n = 4(2 \times 2^{n+1}k_{n+1} - 2^{n+1}k_n) = 2^{n+3}(2k_{n+1} - k_n)$$

Or on a :

$$(k_n, k_{n+1}) \in \mathbb{Z}^2 \Longrightarrow 2k_{n+1} - k_n \in \mathbb{Z}$$

On en déduit donc que $2^{n+3} | u_{n+2}$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence double.

2) On a :

$$r - 8r + 4 = r \in \{4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}\}$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 20 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n \end{cases} \Longrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \; tel \; que \; \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\left(4 + 2\sqrt{3}\right)^n + B\left(4 - 2\sqrt{3}\right)^n$$

De plus on a :

$$u_0 = 2 = A + B \; et \; u_1 = 20 = A\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + B\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$$

On résout le système :

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + B\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 - B \\ (2 - B)\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + B\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 20 \end{cases}$$

Or on a :

$$(2 - B)\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + B\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 20 \Leftrightarrow B\left(-4\sqrt{3}\right) = 20 - 8 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow B = 1 - \frac{12}{4\sqrt{3}}$$
$$= 1 - \sqrt{3}$$

Ainsi on a :

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + B\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 + \sqrt{3} \\ B = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 2} \\ \boldsymbol{u_1 = 20} \\ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n} \end{cases} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} \boxed{\boldsymbol{= \left(1 + \sqrt{3}\right)\left(4 + 2\sqrt{3}\right)^n + \left(1 - \sqrt{3}\right)\left(4 - 2\sqrt{3}\right)^n}}$$

3) On a :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{2^n(x_n + y_n) = 2^n\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n \times \left(1 + \sqrt{3}\right) + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n \times \left(1 - \sqrt{3}\right)\right)}}$$
$$\boxed{\boldsymbol{= \left(1 + \sqrt{3}\right)\left(4 + 2\sqrt{3}\right)^n + \left(1 - \sqrt{3}\right)\left(4 - 2\sqrt{3}\right)^n = u_n}}$$

4) On peut le faire de deux façons.

Méthode 1 : Par récurrence

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) = \; \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{Z}^2 \; tel \; que \; \begin{cases} x_n = \alpha_n + \sqrt{3}\beta_n \\ y_n = \alpha_n - \sqrt{3}\beta_n \end{cases}$$

Initialisation : $n = 0$

On a :

$$x_n = 1+\sqrt{3}, y_n = 1-\sqrt{3}$$

Ainsi $Q(0)$ est vraie avec $\alpha_0 = 1 = \beta_0$

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $Q(n)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} \times \left(1+\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)x_n = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(\alpha_n + \sqrt{3}\beta_n\right) \\ &= 2\alpha_n + 3\beta_n + \sqrt{3}(\alpha_n + 2\beta_n) \\ y_{n+1} &= \left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} \times \left(1-\sqrt{3}\right) = \left(2-\sqrt{3}\right)x_n = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(\alpha_n - \sqrt{3}\beta_n\right) \\ &= 2\alpha_n + 3\beta_n - \sqrt{3}(\alpha_n + 2\beta_n) \end{aligned}$$

On pose :

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 3\beta_n \; et \; \beta_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n$$

On a alors d'après l'hypothèse de récurrence que :

$$(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \in \mathbb{Z}^2$$

De plus on a :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_{n+1} + \sqrt{3}\beta_{n+1} \\ y_{n+1} = \alpha_{n+1} - \sqrt{3}\beta_{n+1} \end{cases}$$

On en déduit donc que $Q(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Remarque : On peut ainsi déterminer précisément les valeurs de α_n et β_n puisque l'on a :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 3\beta_n \\ \beta_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= 2\alpha_{n+1} + 3\beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + 3(\alpha_n + 2\beta_n) = 2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n + 2(\alpha_{n+1} - 2\alpha_n) \\ &= 4\alpha_{n+1} - \alpha_n \end{aligned}$$

Cela revient à déterminer les solutions d'une suite récurrente d'ordre 2 à coefficients constants. Ce que l'on sait faire !

Méthode 2 : A l'aide du binôme de Newton

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, x_n &= \left(2+\sqrt{3}\right)^n \times \left(1+\sqrt{3}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k\right)\left(1+\sqrt{3}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{n-2k-1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k + \sqrt{3}\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k}\right) + \sqrt{3}\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k\right)$$

$$+ 3\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^{k+1}\right)$$

$$+ \sqrt{3}\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k\right)$$

Or on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}, 2^{n-2k} \in \mathbb{N}, 3^k \in \mathbb{N}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^{k+1} \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k \in \mathbb{N}$$

De même on a :

$$y_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n \times \left(1-\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\left(-\sqrt{3}\right)^k\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k - \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k - \sqrt{3}\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k}\right) - \sqrt{3}\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k\right)$$

$$+ 3\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^{k+1}\right)$$

$$- \sqrt{3}\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k\right)$$

En posant :

$$\boldsymbol{\alpha_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^{k+1}} \quad et$$

$$\boldsymbol{\beta_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k+1}2^{n-2k-1}3^k + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \exists(\boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\beta_n}) \in \mathbb{Z}^2 \ \boldsymbol{tel\ que} \begin{cases} \boldsymbol{x_n = \alpha_n + \sqrt{3}\beta_n} \\ \boldsymbol{y_n = \alpha_n - \sqrt{3}\beta_n} \end{cases}}$$

5) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha_n)^2 - 3(\beta_n)^2 = \left(\alpha_n + \sqrt{3}\beta_n\right)\left(\alpha_n - \sqrt{3}\beta_n\right)$$
$$= x_n \times y_n$$
$$= \left(2+\sqrt{3}\right)^n \times \left(1+\sqrt{3}\right) \times \left(2-\sqrt{3}\right)^n \times \left(1-\sqrt{3}\right) = (4-3)^n \times (1-3) = -2$$

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, (\boldsymbol{\alpha_n})^2 - 3(\boldsymbol{\beta_n})^2 = -2}$$

6) Soit d un diviseur commun de α_n et β_n. Ainsi d divise $(\alpha_n)^2$ et $(\beta_n)^2$ donc d divise $(\alpha_n)^2 - 3(\beta_n)^2$ donc d divise 2. Donc $\boxed{\boldsymbol{d} \in \{1;2\}}$.

7) Si d divise α_n et β_n alors d^2 divise $(\alpha_n)^2$ et $(\beta_n)^2$ donc d^2 divise $(\alpha_n)^2 - 3(\beta_n)^2$ donc d^2 divise 2.

Ainsi $d^2 \leq 2$ donc $d = 1$. On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_n \wedge \beta_n = 1}}$$

Exercice 2 : Une suite d'intégrale

Dans cet exercice on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} dt$$

Le but de cet exercice est de déterminer :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} I_k$$

1) Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Démontrer qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \sin(x) \leq K$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$$

c) En déduire la limite de I_n en $+\infty$.Dans toute la suite on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$$

3) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)\,(1-\sin(t))} dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))} dt$$

4) En déduire que :

$$\lim_n S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)\,(1-\sin(t))} dt = S$$

5) Montrer que :

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u)^2(1+u)}$$

6) Démontrer un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall u \in [0; 1[, \frac{du}{(1-u^2)(1+u)} = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

7) En déduire la valeur de S.

1) On a :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \cos(t) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Longrightarrow \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \cos(t) \neq 0$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction :

$$\boxed{f_n : t \mapsto \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} \in \mathcal{C}^0\left(\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\right)}$$

Donc I_n est bien définie.

2) a) On sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], 0 \leq \sin(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

Ainsi en posant

$$\boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On a :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \sin(x) \leq K$$

b) On donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], f_n(t) = \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} \leq \frac{K^n}{\cos(t)} \leq 2K^n$$

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], f_n(t) = \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} \geq 0$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f_n(t) \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{3}} 0\, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_n(t)\, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n dt$$

$$\boxed{\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$$

c) On sait que :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \in [0;1[\Rightarrow \lim_n \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_n \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$\boxed{\lim_n I_n = 0}$$

3) On a par linéarité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_k(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\, dt$$

Or on sait que :

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{\cos(t)} \sum_{k=0}^{n} \sin^k(t)$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \sin(t) \neq 1$$

On a donc :

$$\frac{1}{\cos(t)}\sum_{k=0}^{n}\sin^k(t) = \frac{1-\sin^{n+1}(t)}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\sin^{n+1}(t)}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt$$

$$\boxed{\boldsymbol{= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt}}$$

4) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))} \geq 0 \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt \geq 0$$

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))} \leq \frac{K^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}$$

De plus on a :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \frac{1}{\cos(t)} \leq 2 \; et \; 1-\sin(t) \geq 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \frac{1}{1-\sin(t)} \leq \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))} \leq \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \times K^{n+1}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \times K^{n+1}dt$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt \leq \frac{2\pi}{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}K^{n+1}$$

De même que précédemment on a :

$$\lim_{n}\frac{2\pi}{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}K^{n+1} = 0$$

Ainsi d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n} \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}\,dt = 0$$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{n} S_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}\,dt = S}$$

5) On pose le changement de variable suivant :

$$u = \sin(t)$$

_ On change les bornes :

$$t = 0 \Longrightarrow u = 0$$

$$t = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

_ On calcule le dt ou le du :

$$u = \sin(t) \Longrightarrow du = \cos(t)\,dt$$

_ On transforme l'intégrale :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(t)\,dt}{\cos^2(t)\,(1-\sin(t))} = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(t)\,dt}{(1-\sin^2(t))(1-\sin(t))}$$

$$\boxed{= \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)(1-u)} = \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u)^2(1+u)}}$$

6) On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall u \in [0;1[, \frac{du}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

On peut le faire de beaucoup de façons différentes.

Méthode 1 : Mise au même dénominateur

$$\forall u \in [0;1[, \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{(1-u)^2} = \frac{a(1-u)^2 + b(1-u^2) + c(1+u)}{(1-u)^2(1+u)}$$

$$= \frac{u^2(a-b) + u(-2a+c) + a + b + c}{(1-u)^2(1+u)}$$

On identifie et on résout alors :

$$\boxed{\begin{cases} a - b = 0 \\ -2a + c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

7) On a :

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{(1-u^2)(1-u)}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{1+u}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{1-u}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{(1-u)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n(t)}{\cos(t)}dt=\frac{3}{2}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

Problème 1 : Une équation différentielle un peu particulière (Oral centrale PSI 2016)

Dans ce problème on cherche déterminer l'ensemble (E) suivant :

$$E=\left\{y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall x\in\mathbb{R},2xy'(x)-2y(-x)=\frac{x}{x^2+1}\right\}$$

Partie A : Une première équation différentielle

Dans cette partie on cherche à déterminer :

$$E_1=\{y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall x\in\mathbb{R},2xy'(x)-2y(x)=0\}$$

1) Résoudre l'équation différentielle $2xy'(x)-2y(x)=0$ sur $]0\,;+\infty[$.

2) De même résoudre l'équation différentielle $2xy'(x)-2y(x)=0$ sur $]-\infty;0[$.

3) Démontrer que :

$$E_1=\left\{f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\lambda x\end{cases},\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Partie B :

Dans cette partie on cherche à déterminer :

$$E_2=\left\{y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall x\in\mathbb{R},2xy'(x)+2y(x)=\frac{x}{x^2+1}\right\}$$

1) a) Résoudre l'équation différentielle $2xy'(x)+2y(x)=0$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Déterminer une solution particulière de $2xy'(x)+2y(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(Indication : On pourra utiliser une variation de la constante).

c) En déduire toutes les solutions de $2xy'(x)+2y(x)=\frac{x}{x^2+1}$ sur $]0\,;+\infty[$.

2) En déduire toutes les solutions de $2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $]-\infty\,;0[$. On donnera directement le résultat sans refaire toutes les étapes.

3) a) Démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$

b) En déduire les solutions de $2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C : A la recherche de E.

1) Démontrer que toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$, se décompose de manière unique en une fonction paire et une fonction impaire.

Dans toute la suite de cette partie on note :

$\forall y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists! \left(y_p, y_i\right) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$ tel que $y = y_p + y_i$ et y_p, y_i respectivement paire et impaire

2) a) Démontrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et paire, alors sa dérivée f' est impaire. La réciproque est-elle vraie ?

b) Démontrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et impaire, alors sa dérivée f' est paire. La réciproque est-elle vraie ?

3) Démontrer que :

$$y \in E \Leftrightarrow \begin{cases} y_p \in E_1 \\ y_i \in E_2 \end{cases}$$

4) En déduire l'ensemble E.

Partie A : Une première équation différentielle

1) On sait que :

$$\begin{cases} 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda_1 e^{\int \frac{1}{x} dx} = \lambda_1 e^{\ln(x)} = \lambda_1 x$$

2) Avec le même procédé que la question 1) on obtient :

$$\begin{cases} 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \lambda_2 e^{\int \frac{1}{x} dx} = \lambda_2 e^{\ln(|x|)} = -\lambda_2 x$$

3) L'ensemble (E_1) est l'ensemble des solutions de $2xy'(x) - 2y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On sait que l'on doit avoir d'après les questions précédentes :

$$y \text{ solution de } 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \text{ sur }]0; +\infty[\Longrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda_1 x$$

De même :

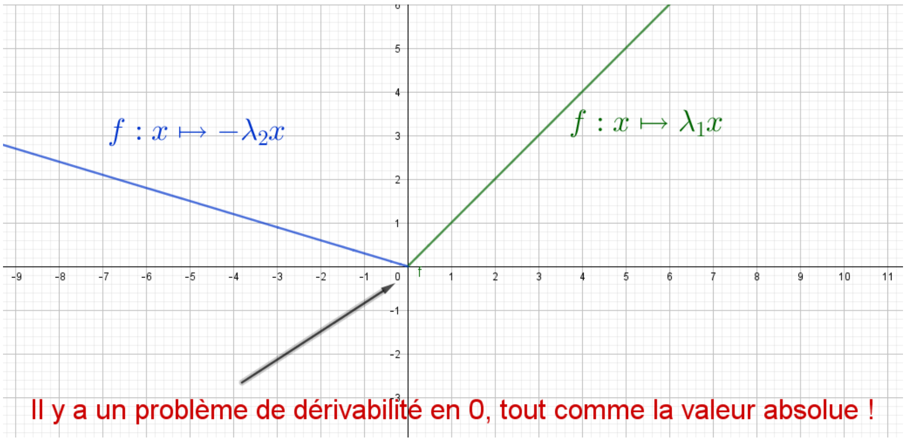
$$y \text{ solution de } 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \text{ sur }]-\infty; 0[\Longrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = -\lambda_2 x$$

On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x \text{ si } x > 0 \\ -\lambda_2 x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Cette fonction est continue mais doit être dérivable. Or on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lambda_1 \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\lambda_2$$



Ainsi on doit avoir $\lambda_1 = -\lambda_2$ pour que f soit solution sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que :

$$\text{y solution de } 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \Longrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 x$$

La réciproque est juste ! On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x \end{cases} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2xf'(x) - 2f(x) = 0$$

On en déduit donc que :

$$E_1 = \left\{ f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Partie B : Une seconde équation différentielle

1) a) On sait que :

$$\begin{cases} 2xy'(x) + 2y(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda_1 e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{\lambda_1}{x}$$

b) On cherche une solution particulière sur $]0; +\infty[$ de :

$$2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

On pose :

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\lambda_1(x)}{x} \end{cases}, avec\ \lambda_1 \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$$

On a alors :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\lambda_1'(x)}{x} - \frac{\lambda_1(x)}{x^2}$$

On en déduit donc que f est solution particulière de $2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1}$ si et seulement si :

$$2x\left(\frac{\lambda_1'(x)}{x} - \frac{\lambda_1(x)}{x^2}\right) + 2\frac{\lambda_1(x)}{x} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \lambda_1(x) = \frac{1}{4}\ln(x^2 + 1) + c$$

On en déduit donc qu'une solution particulière de $2xy'(x) + 2y(x) = 0$ est $x \mapsto \frac{1}{4}\frac{ln(x^2+1)}{x}$.

c) On en déduit donc que :

$$\begin{cases} 2xy'(x) + 2y(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \frac{\lambda_1 + \frac{1}{4} ln(1+x^2)}{x}$$

2) De même on a :

$$\begin{cases} 2xy'(x) + 2y(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \frac{\lambda_2 + \frac{1}{4} ln(1+x^2)}{x}$$

3) a) On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = \frac{2\times 0}{1+0^2} = 0$$

Avec $f(x) = ln(x^2+1)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0 !

b) On sait que :

$$\text{y est solution de } 2\text{xy}'(\text{x}) + 2\text{y}(\text{x}) = \frac{\text{x}}{\text{x}^2+1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda_1 + \frac{1}{4} ln(1+x^2)}{x} & si\ x > 0 \\ y(x) = \dfrac{\lambda_2 + \frac{1}{4} ln(1+x^2)}{x} & si\ x < 0 \end{cases}$$

De plus y doit être définie et continue en 0. Si $\lambda_1 \neq 0$ on a :

$$\lim_{x\to 0^+} |y(x)| = +\infty$$

De même si $\lambda_2 \neq 0$ ona :

$$\lim_{x\to 0^-} |y(x)| = +\infty$$

Pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$, on doit donc avoir $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$

On en déduit donc que :

$$y \text{ est solution de } 2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R} \Longrightarrow \forall x \neq 0, y(x) = \frac{1}{4}\frac{ln(1+x^2)}{x}$$

On pose à présent :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{4}\dfrac{ln(1+x^2)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

On peut voir que f est continue d'après 3) a). Montrons que f est dérivable en 0

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{ln(1+x^2)}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X\to 0} \frac{ln(1+X)}{X} = 1$$

On en déduit donc que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{4}$.

On en déduit donc que :

$$2xy'(x)+2y(x)=\frac{x}{x^2+1}\ sur\ \mathbb{R} \Leftrightarrow y:\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{ln(1+x^2)}{x}\ si\ x\neq 0 \\ 0\ sinon \end{cases} \end{cases}$$

Partie C : A la recherche de E

1) Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f_p(x)+f_i(x)$$

On vérifie facilement que f_p est paire et f_i impaire.

Il reste à présent à démontrer que cette décomposition est unique !

On suppose que $\exists(f_p,g_p)\in(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$, paires, et $(f_i,g_i)\in(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$ impaires telles que :

$$f=f_p+f_i=g_p+g_i$$

On a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\left(f_p-g_p\right)=(g_i-f_i)$$

Or f_p-g_p est paire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\left(f_p-g_p\right)(-x)=f_p(-x)-g_p(-x)=f_p(x)-g_p(x)=\left(f_p-g_p\right)(x)$$

Et g_i-f_i est impaire :

$$\forall x\in\mathbb{R},(f_i-g_i)(-x)=f_i(-x)-g_i(-x)=-f_i(x)+g_i(x)=-(f_i-g_i)(x)$$

Donc f_p-g_p est à la fois paire et impaire, donc $f_p-g_p=0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ donc $f_p=g_p$ et $f_i=g_i$.

Ainsi la décomposition est unique.

2) a) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ paire. On a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)\Longrightarrow\forall x\in\mathbb{R},-f'(-x)=f'(x)\Longrightarrow f'est\ impaire$$

La réciproque est vraie.

Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que f'est impaire. On a alors :

$$f'(-x)+f'(x)=0\Longrightarrow\int\left(f'(-x)+f'(x)\right)dx=\int 0dx$$

$$\Longrightarrow\exists c\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},-f(-x)+f(x)=c$$

On en déduit donc que :

$$\exists c\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)-c$$

Or on a :

$$f(0)=f(0)+c\Longrightarrow c=0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)$$

Donc la réciproque est vraie.

b) On fait de même. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ impaire. On a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=-f(x)\Longrightarrow\forall x\in\mathbb{R},-f'(-x)=-f'(x)\Longrightarrow f'est\ paire$$

La réciproque est fausse.

On pose $f:x\mapsto sin(x)+1$. On a alors $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\ et\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$. Cependant $f':x\mapsto cos(x)$ et donc f' est paire.

3) C'est une équivalence. Commençons par le plus facile. Soit $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $u=y_p+y_i$ sa décomposition en une fonction paire et impaire. Montrons que :

$$y \in E \Leftarrow \begin{cases} y_p \in E_1 \\ y_i \in E_2 \end{cases}$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2xy_p'(x) - 2y_p(x) = 0, 2xy_i'(x) + 2y_i(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

De plus on sait que $y' = y_p' + y_i'$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2xy_p'(x) - 2y_p(x) = 0 \\ 2xy_i'(x) + 2y_i(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2xy_p'(x) - 2y_p(x) + 2xy_i''(x) + 2y_i(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow 2x\left(y_p'(x) + y_i''(x)\right) - 2\left(y_p(-x) + y_i(-x)\right) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow 2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2+1}$$

On a donc :

$$\begin{cases} y_p \in E_1 \\ y_i \in E_2 \end{cases} \Longrightarrow y \in E$$

Montrons la <u>réciproque</u>.

On a :

$$y \in E \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow 2x\left(y_p'(x) + y_i'(x)\right) - 2\left(y_p(-x) + y_i(-x)\right) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow 2xy_p'(x) - 2y_p(x) + 2xy_i'(x) + 2y_i(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

On pose $f: x \mapsto 2xy_p'(x) - 2y_p(x) + 2xy_i'(x) + 2y_i(x)$. On sait que $f: x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$, donc f est impaire.

De plus on sait que f se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On en déduit donc que $f = f_p + f_i$ avec $f_p = 0$ et $f_i \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

Or on a vu précédemment que y_p' était impaire, et y_i' était paire. On pose $g: x \mapsto 2xy_p'(x) - 2y_p(x)$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = 2(-x)y_p'(-x) - 2y_p(-x) = 2xy_p'(x) - 2y_p(x) = g(x)$$

Donc g est paire. De même si on pose $h: x \mapsto 2xy_i'(x) + 2y_i(x)$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = 2(-x)y_i'(-x) + 2y_i(-x) = -\left(2xy_i'(x) + 2y_i(x)\right) = -h(x)$$

Donc h est impaire. Par unicité de la décomposition, on en déduit donc que :

$$2xy_p'(x) - 2y_p(x) + 2xy_i'(x) + 2y_i(x) = \frac{x}{x^2+1} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2xy_p'(x) - 2y_p(x) = 0 \\ 2xy_i'(x) + 2y_i(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$y \in E \Longrightarrow \begin{cases} y_p \in E_1 \\ y_i \in E_2 \end{cases}$$

4) On sait que :

$$y \in E \Leftrightarrow \begin{cases} y_p \in E_1 \\ y_i \in E_2 \end{cases}$$

De plus on sait que $E_1 = \left\{ f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Ainsi la seule fonction paire de E_1 est la fonction nulle $0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}} : x \mapsto 0$.

De plus on sait que :

$$E_2 = \left\{ f: \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{ln(1+x^2)}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ sinon \end{cases} \end{array} \right. \right\}$$

On vérifie que f est impaire. On en déduit donc que :

$$E = \left\{ y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, 2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2+1} \right\}$$

$$= \left\{ f: \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{ln(1+x^2)}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ sinon \end{cases} \end{array} \right. \right\}$$

Problème 2 : une équation différentielle

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E): y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Partie A : Des résultats préliminaires

1) Démontrer que la fonction sh définie par :

$$\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Déterminer sa bijection réciproque, notée sh^{-1} ou argsh.

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Partie B : Résolution de l'équation différentielle

1) Résoudre l'équation homogène suivante :

$$(E_0): y'' + 6y' + 9y = 0$$

2) Soit $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto z(x)e^{-3x} \end{cases}$$

a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si z vérifie la relation :

$$z''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) En remarquant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = 1 \times \operatorname{argsh}(x)$$

Et à l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de argsh.
c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Partie A :

1) On sait que :

$$sh : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que sh est de classe $\mathcal{C}\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$$

Comme sh est continue sur $\mathbb{R}$ et sstrictement croissante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image.
Or on a :

$$\lim_{x \to +\infty} sh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{2} = +\infty$$

Par imparité de sh on a :

$$\lim_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$$

Donc sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour déterminer sh^{-1} il suffit de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnu x :

$$\begin{gathered} sh(x) = y \\ \Leftrightarrow \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = y \\ \Leftrightarrow e^{x} - e^{-x} = 2y \\ \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^{x} - 1 = 0 \text{ (car } e^{x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow X^{2} - 2yX - 1 = 0 \text{ car } X = e^{x} \end{gathered}$$

On a :

$$\Delta = 4y^{2} + 4 = 4(y^{2} + 1) > 0$$

On a donc deux solutions réelles à $X^{2} - 2yX - 1 = 0$:

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{2y - 2\sqrt{y^{2} + 1}}{2} = y - \sqrt{y^{2} + 1} \\ X_2 = y + \sqrt{y^{2} + 1} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\begin{gathered} \forall y \in \mathbb{R}, y^{2} + 1 > y^{2} \\ \Longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{y^{2} + 1} > |y| \ \left(\text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{+}\right) \end{gathered}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{gathered} \forall y \in \mathbb{R}, y - \sqrt{y^{2} + 1} < 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, y + \sqrt{y^{2} + 1} > 0 \end{gathered}$$

$$e^x = y - \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$
$$e^x = y - \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Donc on a :

$$\mathrm{sh}(x) = y \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\mathbf{argsh} = \mathbf{sh}^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{ln}\left(\mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}^2+1}\right) \end{cases}}$$

3) On peut utiliser deux méthodes.

M1 : On a réussi la question précédente !!

On a :

argsh $\in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x + \sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

M2 : On utilise la forme d'une fonction composée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}\left(\mathrm{argsh}(x)\right) = x$$
$$\Longrightarrow \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\mathrm{argsh}(x)\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\left(\mathrm{argsh}(x)\right)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Partie B : Résolution de l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' + 6y' + 9y = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow (r+3)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -3$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, y_0(x) = (Ax+B)e^{-3x}$$

2) a) z $\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ donc f $\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(z'(x) - 3z(x)\right)e^{-3x}$$
$$f''(x) = \left(z''(x) - 3z'(x) - 3z'(x) + 9z(x)\right)e^{-3x}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},, f(x)'' + 6f'(x) + 9f(x)$$
$$= \left(z''(x) - 6z'(x) + 9z(x) + 6z'(x) - 18z(x) + 9z(x)\right)e^{-3x}$$
$$= z''(x)e^{-3x}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},, f(x)'' + 6f'(x) + 9f(x) = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{\mathbf{z''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}}$$

b) On effectue une intégration par partie :

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \operatorname{argsh}(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ v(x) = x \end{cases}$$

On a donc :

$$\int \operatorname{argsh}(x)dx = x\operatorname{argsh}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$= \mathbf{x\operatorname{argsh}(x) - \sqrt{x^2+1}}$$

c) On cherche une solution particulière de

$$(E): y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

On a vu précédemment que cela revient à déterminer :

$$z''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Or on sait que :

$$z''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow z'(x) = \operatorname{argsh}(x) + \text{cste}$$

On peut poser $\text{cste} = 0$ puisque l'on cherche une solution particulière.

On a donc :

$$z'(x) = \operatorname{argsh}(x) \Longrightarrow z(x) = x\operatorname{argsh}(x) - \sqrt{x^2+1} + \text{cste}$$

De la même façon on peut poser $\text{cste} = 0$.

On obtient donc :

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}} \Longleftrightarrow\Longleftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, y(x)$$
$$= \boxed{\mathbf{\left(Ax + B + x\operatorname{argsh}(x) - \sqrt{x^2+1}\right)e^{-3x}}}$$