DS n°4 PCSI 2024-2025

Exercice 1 : Suite et arithmétique

Dans tout cet exercice on considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 20 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z} \; et \; 2^{n+1} | u_n$$

2) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{cases} x_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n \times \left(1+\sqrt{3}\right) \\ y_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n \times \left(1-\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

3) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \times (x_n + y_n)$$

4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{Z}^2 \; tel \; que \; \begin{cases} x_n = \alpha_n + \sqrt{3}\beta_n \\ y_n = \alpha_n - \sqrt{3}\beta_n \end{cases}$$

5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 - 3\beta_n^2 = -2$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ diviseur commun positif de $\alpha_n \; et \; \beta_n$. Montrer que $d = 1 \; ou \; d = 2$.

7) Déterminer $\alpha_n \wedge \beta_n$.

Exercice 2 : Une suite d'intégrale

Dans cet exercice on pose :

$$\forall \, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} dt$$

Le but de cet exercice est de déterminer :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} I_k$$

1) Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Démontrer qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \sin(x) \leq K$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$$

c) En déduire la limite de I_n en $+\infty$.Dans toute la suite on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$$

3) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)^{n+1}}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt$$

4) En déduire que :

$$\lim_n S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)\,(1-\sin(t))}dt = S$$

5) Montrer que :

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)(1-u)}$$

6) Démontrer un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall u \in [0;1[, \frac{1}{(1-u^2)(1-u)} = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

7) En déduire la valeur de S.

Problème 2 : Une équation différentielle un peu particulière (Oral centrale PSI 2016)

Dans ce problème on cherche déterminer l'ensemble (E) suivant :

$$\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{y} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 2\mathrm{xy}'(\mathrm{x}) - 2\mathrm{y}(-\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1} \right\}$$

Partie A : Une première équation différentielle

Dans cette partie on cherche à déterminer :

$$\mathrm{E}_1 = \{ \mathrm{y} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 2\mathrm{xy}'(\mathrm{x}) - 2\mathrm{y}(\mathrm{x}) = 0 \}$$

1) Résoudre l'équation différentielle $2\mathrm{xy}'(\mathrm{x}) - 2\mathrm{y}(\mathrm{x}) = 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

2) De même résoudre l'équation différentielle $2\mathrm{xy}'(\mathrm{x}) - 2\mathrm{y}(\mathrm{x}) = 0$ sur $]-\infty;0[$.

3) Démontrer que :

$$\mathrm{E}_1 = \left\{ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Partie B : Une seconde équation différentielle

Dans cette partie on cherche à déterminer :

$$\mathrm{E}_2 = \left\{ \mathrm{y} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 2\mathrm{xy}'(\mathrm{x}) + 2\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1} \right\}$$

1) a) Résoudre l'équation différentielle $2\mathrm{xy}'(\mathrm{x}) + 2\mathrm{y}(\mathrm{x}) = 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Déterminer une solution particulière de $2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

c) En déduire toutes les solutions de $2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $]0\,;+\infty[$.

2) En déduire toutes les solutions de $2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $]-\infty\,;0[$. On donnera directement le résultat sans refaire toutes les étapes.

3) a) Démontrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$

b) En déduire les solutions de $2xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C : A la recherche de E

1) Démontrer que toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$, se décompose de manière unique en une fonction paire et une fonction impaire.

Dans toute la suite de cette partie on note :

$\forall y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists! \left(y_p, y_i\right) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$ tel que $y = y_p + y_i$ et y_p, y_i respectivement paire et impaire

2) a) Démontrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et paire, alors sa dérivée f' est impaire. La réciproque est-elle vraie ?

b) Démontrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et impaire, alors sa dérivée f' est paire. La réciproque est-elle vraie ?

3) Démontrer que :

$$y \in E \Leftrightarrow \begin{cases} y_p \in E_1 \\ y_i \in E_2 \end{cases}$$

4) En déduire l'ensemble E.

Problème 2 : Une équation différentielle

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E)\colon y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Partie A : Des résultats préliminaires

1) Démontrer que la fonction sh définie par :

$$\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Déterminer sa bijection réciproque, notée sh^{-1} ou argsh.

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Partie B : Résolution de l'équation différentielle

1) Résoudre l'équation homogène suivante :

$$(E_0)\colon y'' + 6y' + 9y = 0$$

2) Soit z $\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto z(x)e^{-3x} \end{cases}$$

a) Montrer que *f* est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si z vérifie la relation :

$$z''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) En remarquant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, argsh(x) = 1 \times argsh(x)$$

Et à l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de argsh.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).