TD 13 : Limite d'une fonction

Partie A : La définition

Exercice A.1 : 1) Soit $f : I \to \mathbb{R}, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \overline{I}$. Démontrer que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$$

2) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice A.2 : 1) Déterminer :

$$\overline{]-2;7]} \text{ et } \overset{o}{]-2;7]}$$

2) Déterminer $\overline{\mathbb{R}}$

Partie B : Calcul direct

Exercice B.1 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) \quad L_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}} \quad L_3 = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2\right) \quad L_4 = \lim_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Exercice B.2 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1 = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{2x+7} - 3} \;;\; L_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor} \;;\; L_3 = \lim_{x \to 0} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice B.3 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} x\sin(x) \;;\; L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}}{x} \;;\; L_3 = \lim_{x \to 0} \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice B.4 : Etudier la limite (éventuellement à gauche et à droite) de chacune des expressions suivantes au point considéré :

$$\frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} \text{ en } a \;;\; \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} \text{ en } 1 \;;\; \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \text{ en } 0$$

Exercice B.5 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1 = \lim_{x \to \alpha} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(\alpha)}{x^2 - \alpha^2} \quad L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} \quad L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Partie C : Extrait de concours SUP-SPE

Exercice C.1 (Optima SUP-SPE 2016) : Soit f une fonction décroissante, définie sur $]0;1]$ telle que :

$$\forall\, x \in]0;1],\, 1 - x \leq f(x) \leq 2 + x$$

Montrer que f admet une limite en 0.

Exercice C.2 (CCP PC 2015) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point $x_0 \in \overset{o}{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I telle que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

a) Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$. Montrer que :

$$\exists\, \mu > 0, \forall\, x \in |x_0 - \mu; x_0 + \mu|, a < f(x) < b$$

b) Soit α un réel tel que $\ell \neq \alpha$. Montrer que :

$$\exists\, \mu > 0, \forall\, x \in |x_0 - \mu; x_0 + \mu|, f(x) \neq \alpha$$