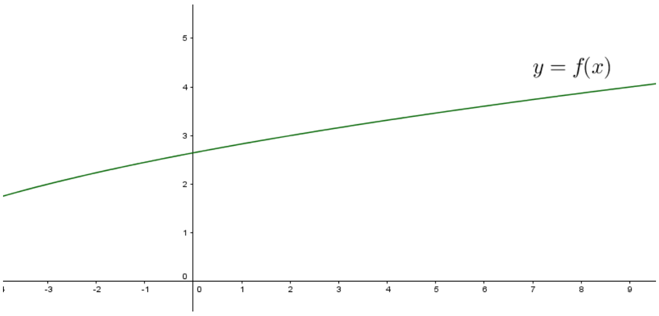
Chapitre 13 : Limite de fonctions

I) Limite d´une fonction en l´infini ou aux fonctions presque rien de nouveau

Dans toute cette partie, on pose $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $I =]a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

a) Limite en +∞ ou en -∞



Définition : On dit que f tend vers +∞ quand x tend vers +∞ si pour tout réel A (aussi grand soit-il) il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0, f(x) > A$. Ce qui s´écrit mathématiquement :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) > A$$

On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty \text{ ou } f(x) \underset{+\infty}{\to} +\infty$$

Définition :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) \geq A$$

Exemple I.a.1 : Démontrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x + 3 = +\infty$$

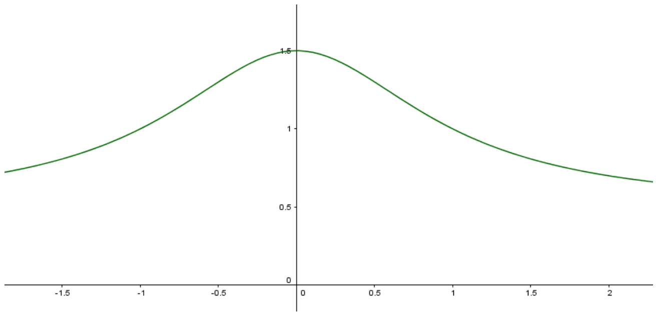
Application I.a.2 : Soit f et g deux fonctions définies sur I =]a; +∞[. Montrer que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty \end{cases}$$

Remarque 1 : On a bien sûr :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) \leq A$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \leq x_0, f(x) \geq A$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \leq x_0, f(x) \leq A$$

b) Asymptotes horizontales



Définition : Soit ℓ∈ℝ. On dit que f(x) tend vers ℓ quand x tend vers +∞ (ou -∞) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient f(x) pour x assez grand. Pour tout ε>0 (aussi petit soit-il), il existe un réel x_0 à partir duquel f(x) est dans l´intervalle $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.

Mathématiquement on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

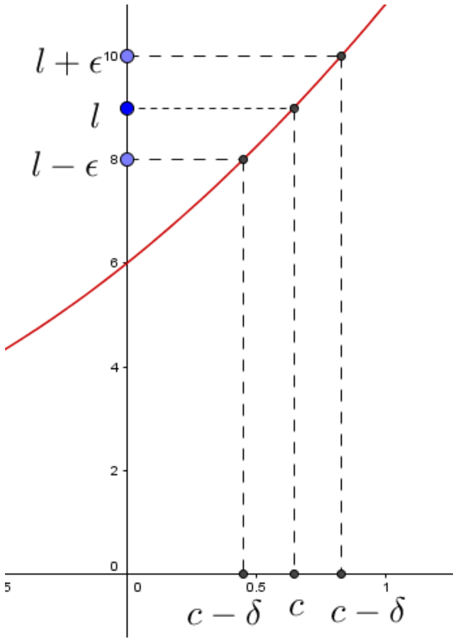
Définition : On dit alors que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation y = ℓ en +∞.

Remarque : On a bien sûr :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \leq x_0, f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$$

II) Limite d´une fonction en un réel fini

Dans toute cette partie, on pose $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $I =]a; b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $c \in]a; b[$.



a) Limite fini en c

Définition : On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers c si pour tout x « suffisamment proche » de c, alors f(x) est « suffisamment proche » de ℓ. Ce qui s´écrit mathématiquement :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x-c| \leq \delta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \text{ ou } f(x) \underset{x\to c}{\to} \ell \text{ ou } f(x) \underset{c}{\to} \ell$$

Définition :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x-c| \leq \delta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

b) Asymptotes verticales

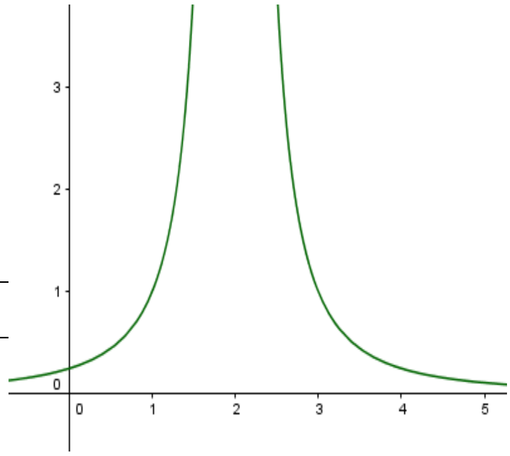
Définition : Soit un réel x_0. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers c si pour tout réel A (aussi grand soit-il) il existe un réel ε>0 tel que pour tout $x \in]x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon[$, $f(x) > A$.

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \iff \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x-c| \leq \delta \implies f(x) \geq A$$

Définition (ASYMPTOTE VERTICALE) : Soit f une fonction telle que : il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et avec :

$$\lim_{x\to \ell} f(x) = \mp\infty$$

On dit alors que la courbe représentative de f, C_f, admet une asymptote verticale d´équation $x = \ell$.



Remarque : On a de même :

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x-c| \leq \delta \implies f(x) \leq A$$

Exemple II.b.1 : Déterminer une fonction telle que :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$

c) Limite à gauche et à droite

On peut avoir une limite finie à droite et à gauche différentes. Il faut donc le matérialiser comme ceci :

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x) \quad OU \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)$$

On a alors :

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x) = \ell \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in \boldsymbol{I} \cap]-\infty; \boldsymbol{c}[, |x-c| \leq \delta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x) = \ell \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in \boldsymbol{I} \cap]\boldsymbol{c}; +\infty[, |x-c| \leq \delta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

Exemple II.c.1 : Déterminer une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)$$

III) Un peu de topologie

a) Adhérence et voisinage

Définition (les voisinages de $\overline{\mathbb{R}}$) :

- On dit que $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha; a+\alpha[\subset \mathcal{V}$. On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.
- On dit que $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel A>0 tel que $[A\,;+\infty[\subset \mathcal{V}$
- On dit que $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel B<0 tel que $]-\infty; B] \subset \mathcal{V}$

Définition (Adhérence et intérieur) : Soit $A \subset \mathbb{R}$ $\left(A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\right)$. On dira que :

- Un élément a appartient à l'adhérence de A lorsque tout voisinage de a rencontre A.

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A

- Un élément a appartient à l'intérieur de A lorsqu'il existe un voisinage de a inclus dans A.

On note $\overset{o}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

Remarque : Si A est un intervalle, alors $\overset{o}{A}$ est l'intervalle ouvert en ses bornes.

Exemple III.a.1 : Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $I = [2\,;5[$.

Remarque : Grâce à ces définitions de topologie, on peut directement écrire la définition des limites.

b) Limites et voisinage

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On pose $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a alors :

$$f \text{ admet } \ell \text{ pour limite au point a}$$
$$\text{ssi}$$
$$\text{Pour tout voisinage } \mathcal{V}_\ell \text{ de } \ell, \text{il existe un voisinage } \mathcal{V}_a \text{ tel que, pour tout } x \in \mathcal{V}_a \cap I, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$$
$$\text{Ssi}$$
$$\forall\, \mathcal{V}_\ell, \exists\, \mathcal{V}_a, \forall\, x\ \ \mathcal{V}_a \cap I, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$$

IV) Propriété d'une fonction admettant une limite

a) Unicité de la limite

Propriété IV.a.1 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On pose $a \in \overline{I}\ et\ \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- f n'admet pas forcément de limite.
- Si la limite existe, elle est unique.

Exemple IV.a.2 : Déterminer une fonction qui n'admet de pas de limite en $+\infty$

b) Limite et inégalité

Propriété IV.b.1 (Fonction localement bornée) : Toute fonction admettant une limite finie en un point de $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de ce point.

ATTENTION : Contrairement aux suites, une fonction peut être localement bornée sans être bornée globalement.

Contre-exemple IV.b.2 : Déterminer une fonction qui est bornée au voisinage de $+\infty$ mais qui n'est pas globalement bornée.

Propriété IV.b.3 (passage à la limite des inégalités) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$. On pose $a \in \bar{I}$ et $(\ell; \ell') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to a} g(x) = \ell' \end{cases} \Rightarrow \ell \leq \ell'$$

Remarque : Une inégalité stricte se transforme en une inégalité large par passage à la limite. Pour garder une inégalité stricte, il faut prendre des précausions !!!

Exemple IV.b.4 : Déterminer un couple $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

Application IV.b.5: Montrer qu'une fonction strictement croissante qui tend vers 0 en $+\infty$ est strictement négative.

c) Suites, fonctions et limites

Propriété IV.c.1 (caractérisation séquentielle de la limite) : Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim_{n \to +\infty} u_n = a, \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell\right)$$

Remarque : On utilise souvent cette équivalence par contraposée pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite.

Application III.c.2 **:** On pose :

$$\forall x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Montrer que f n'admet pas de limite en 0.

V) Opérations sur les limites (aux fonctions rien de nouveaux)

Remarque : Toutes les propriétés des limites que nous avons vu pour les suites se transposent sans aucune difficulté aux fonctions.

a) Somme, produit, quotient

Propriété V.a.1 : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $(\ell; \ell') \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad ET \quad \lim_{x \to a} g(x) = \ell'$$

On a alors :

$$\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \lim_{x \to a} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \ell + \mu \ell'$$
$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \times g(x)\big) = \ell \times \ell'$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'} \quad (Si\ \ell' \neq 0)$$

Remarque : Les règles pour les signes, les fonctions rationnelles… que l'on a vu dans le chapitre des suites fonctions bien entendu pour les fonctions.

b) Théorèmes d'existence

Propriété V.b.1 (limite d'une composée) : Soient $f : I \to J$ et $g: J \to \mathbb{R}$. Soient $a \in \bar{I}, b \in \bar{J}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X \to b} g(X) = \ell \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = \ell$$

Application V.b.2 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

Propriété V.b.3 (Théorème de la limite monotone) : Soient $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ et $f:]a; b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On a alors :

- La fonction *f* est majorée sur un voisinage de b ($V_b \cap I$) et :

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{]a;b[} f$$

- La fonction *f* n'est pas majorée et :

$$\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$$

Remarque : On a la même chose en a avec la minoration et en -∞ avec une fonction décroissante.

Propriété V.b.4 (Théorème des gendarmes) : Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} \exists\, V_a, tel\ que\ \forall\, x \in V_a, g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Application V.b.5 : Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

ATTENTION : On a aussi un théorème de minoration ou de majoration qui n'est pas le théorème des gendarmes !!.

Propriété V.b.6 (Théorème de majoration) : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$. On a :

$$\begin{cases} \exists\, V_a, tel\ que\ \forall\, x \in V_a, g(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Remarque : On a bien entendu la même chose avec une majoration et une limite vers -∞.

Application V.b.7 : Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|\sin(x)|}$$