Fiche TD 14 : Continuité

Partie A : Continuité locale

Exercice A.1 : Soit f la fonction à valeurs réelles définie par : $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 1 \\ x^2 \text{ si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} \text{ si } x > 4 \end{cases}$

1) Tracer le graphe de f.
2) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$

Exercice A.2 :
Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 pour f et en 1 pour g ?

$$f(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ b) } g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

Exercice A.3 : On pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-x}} \; si\; x \neq 0 \\ 0\; sinon \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Exercice A.4 : On pose :

$$f : \begin{cases}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)} \end{cases}$$

Montrer que g est prolongeable par continuité en 1.

Partie B : Continuité globale

Exercice B.1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$(E_n): x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k = 1$$

1) Montrer que (E_n) admet une unique solution sur [0 ;+∞[.
2) Soit x_n cette unique solution. Montrer que (x_n) converge puis calculer sa limite.

Exercice B.2 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall\, x \in I, f(x)^2 = 1$$

Déterminer toutes les fonctions f possibles.

Exercice B.3 : Une personne parcourt 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30mn où il a parcouru exactement 2km.

Exercice B.4 : Soient f et g deux fonctions de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$M(x) = \sup_{t\in[-1;1]} \big(f(t) + xg(t)\big)$$

a) Expliciter $M(x)$ lorsque $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ et $g(t) = t$.
b) Montrer que $M: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
c) Montrer que :

$$\forall\, h > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} M(x+h) \leq M(x) + h \times \sup\limits_{t\in[-1;1]} g \\ M(x+h) \geq M(x) + h \times \inf\limits_{t\in[-1;1]} g \end{cases}$$

d) En déduire que $M: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice B.5 : Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x)$$

Montrer que $f = g$.

Exercice B.6 : On pose :

$$f:\begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}\end{cases}$$

1) Montrer que f est bijective.
2) Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})$$

Exercice B.7 : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0([a;b];\mathbb{R})$ tel que :

$$f([a;b]) \subset [a;b]$$

Montrer que :

$$\exists\, c \in [a;b], f(c) = c$$

Exercice B.8 : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\exists (x_1;x_2) \in [0;1]^2, \begin{cases} f(x_1) = f(x_2) \\ x_2 - x_1 = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Exercice B.9 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective. On se propose de montrer que f est strictement monotone.

Partie A : Première méthode :

On considère $(a,b,x,y) \in I^4$ avec $a < b$ et $x < y$. On pose :

$$\forall t \in [0;1], u(t) = tx + (1-t)a$$
$$\forall t \in [0;1], v(t) = ty + (1-t)b$$
$$\forall t \in [0;1], G(t) = f\big(u(t)\big) - f\big(v(t)\big)$$

1) Calculer $u(0), u(1), v(0)$ et $v(1)$.
2) Tracer u et v.
3) Montrer que :

$$\forall t \in [0;1], u(t) < v(t)$$

4) En déduire que G ne s'annule pas sur $[0;1]$ puis que $G(0)$ et $G(1)$ ont même signe.
5) En déduire que f est monotone sur I.

Partie B : Deuxième méthode : On suppose que f n'est pas monotone.

1) Expliquer pourquoi on peut supposer :

$$\exists a < b < c \text{ tels que } f(a) < f(b) < f(c)$$

2) Faire un dessin.
3) Conclure.

Exercice B.10 : Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ vérifiant $f(0) = 0; f(1) = 1, \forall\, x \in [0;1], fof(x) = x$. Déterminer f.

Exercice B.11 : Soient $f, g : [0;1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall\, x \in [0;1], f(x) < g(x)$. Montrer que :

$$\exists m > 0;\ \forall\, x \in [0;1], f(x) + m \leq g(x)$$

Partie C : Equations fonctionnelles

Exercice C.1 : Déterminer toutes les fonctions continues sur l'intervalle considéré vérifiant les relations fonctionnelles suivantes :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$
b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = f(x)$
c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$ $\left(\text{On poura prendre } \left(x^{2^n}\right) \text{ et } \left(x^{2^{-n}}\right)\right)$
d) $\forall\, x \in [0;1], f(x^2) \leq f(x)$ et $f(0) = f(1)$ $\left(\text{On poura prendre } \left(x^{2^n}\right) \text{ et } \left(x^{2^{-n}}\right)\right)$
e) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$ $\left(\text{Etudier la suite définie par } u_0 = x \text{ et } u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}\right)$

Exercice C.2 : Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations fonctionnelles suivantes :

a) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
b) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$
c) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$