Programme de Colle n°14
(12 au 16 janvier 2025)

Arithmétique

c) Ensembles de nombres usuels

Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM. Algorithme d'Euclide. Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.
Nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels, en particulier celle de $\mathbb{R}$, est hors programme.

Limite de fonctions

a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$),par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	

Continuité en un point

b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	

c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.

Questions de cours

Propriété I.1 : On a les inclusions strictes suivantes :
$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Infinitude des nombres premiers

Propriété IV.c.1 (caractérisation séquentielle de la limite) : Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell\right)$$

Propriété III.a.1 (Théorème des valeurs intermédiaires version 1) : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $x_0 \in]a;b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercices types

Exercice A.4 : Soit $(a_0; a_1; \dots; a_n) \in [\![0;9]\!]^{n+1}$. On pose :
$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$
Démontrer que :
$$3 | \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \Leftrightarrow 3 | \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Exercice B.6 : Chercher les couples d'entiers (a, b) tels que :
$$\begin{cases} a \wedge b = 42 \\ a \vee b = 1680 \end{cases}$$

Exercice C.3 (petit théorème de Fermat) :

1) Montrer que :
$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in [\![1; p-1]\!], p | \binom{p}{k}$$
2) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, p | (n^p - n)$$
3) a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, 42 | (n^7 - n)$$
b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$$

TD 13

Exercice B.3 : Calculer les limites suivantes si elles existent :
$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} x \sin(x) \quad ; \quad L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}}{x} \quad ; \quad L_3 = \lim_{x\to 0} \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice B.4 : Etudier la limite (éventuellement à gauche et à droite) de chacune des expressions suivantes au point considéré :
$$\frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} \text{ en } a \quad ; \quad \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} \text{ en } 1 \quad ; \quad \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \text{ en } 0$$

Exercice B.5 : Calculer les limites suivantes si elles existent :
$$L_1 = \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(\alpha)}{x^2 - \alpha^2} \qquad L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} \qquad L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Exercice C.2 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point $x_0 \in \overset{o}{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I telle que
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

a) Soient a et b deux réels tels que a $< \ell <$ b. Montrer que :

$$\exists\, \mu > 0, \forall\, x \in |x_0 - \mu; x_0 + \mu|, a < f(x) < b$$

b) Soit α un réel tel que $\ell \neq$ α. Montrer que :

$$\exists\, \mu > 0, \forall\, x \in |x_0 - \mu; x_0 + \mu|, f(x) \neq \alpha$$