Correction TD 13 : Limite d'une fonction

Partie A : La définition

Exercice A.1 : 1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$. Démontrer que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$$

2) La réciproque est-elle vraie ?

Il faut séparer les cas avec $\ell = \pm\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$, de même avec $x_0 = \pm\infty$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- **1[er] cas : $\ell = +\infty$ et $x_0 = +\infty$**

On sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x > x_0, f(x) > 0 \implies \forall x > x_0, f(x) = |f(x)|$$

On a donc :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x > x_0, f(x) = |f(x)|$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$$

Remarque, les cas sont similaires avec $\ell = \pm\infty$ et $x_0 = \pm\infty$.

- **2[ième] cas : $(\ell, x_0) \in \mathbb{R}^2$**

Ici la preuve réside dans une partie de l'inégalité triangulaire !! Je le donne ici sur $\mathbb{C}$ mais sur $\mathbb{R}$ suffit !

On sait que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

On sait que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On pose alors $\varepsilon > 0$.

On a alors :

$$\exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies \big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Donc d'après la définition :

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$$

Remarque : On a la même chose sur les suites !

2) La réciproque est fausse.

Pour les suites cela est facile, il suffit de poser $u_n = (-1)^n$. (u_n) diverge car elle admet deux valeurs d'adhérence distinctes, 1 et -1.

Ici on peut penser à la même chose :

$$f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$$

On a alors :

$$\forall x > 0, |f(x)| = 1$$

On peut montrer que f n'admet pas de limite. Il suffit d'utiliser la définition séquentielle de la limite :

$$u_n = 2n \text{ et } v_n = 2n + 1$$

On a alors :

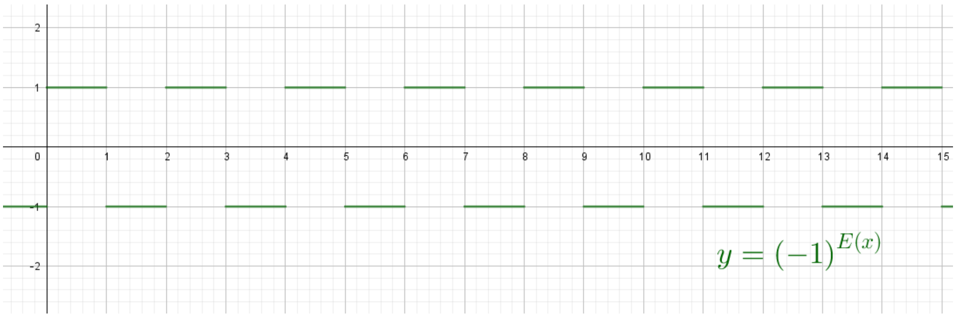
$$\lim_n u_n = +\infty = \lim_n v_n$$

Pourtant on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = 1 \to 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(v_n) = -1 \to -1$$

Donc f n'admet pas de limite.

On peut le voir sur la courbe ci-dessous :



Exercice A.2 : 1) Déterminer :

$$\overline{]-2;7]} \text{ et } \overset{o}{]-2;7]}$$

2) Déterminer : $\overline{\mathbb{R}}$

1)

- **Montrons que : $]-2,7[\subset \overline{]-2;7]}$.**

Soit $x \in]-2,7[$, on pose :

$$\epsilon = \min\left(\frac{x+2}{2}, \frac{x-7}{2}\right) > 0$$

On a alors :

$$x - \epsilon \geq x - \frac{x+2}{2} \Longrightarrow x - \epsilon \geq \frac{x-2}{2} > -2$$
$$x + \epsilon \geq x - \frac{x-7}{2} \Longrightarrow x - \epsilon \leq \frac{x+7}{2} < 7$$

Donc $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset]-2,7[$.

On a donc prouvé que :

$$\forall x \in]-2,7[, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que }]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset]-2,7[$$

Donc on a bien :

$$]-2,7[\subset \overline{]-2;7]}$$

De plus on sait que :

$$\overline{]-2;7]} \subset]-2;7]$$

On a donc deux choix :

$$\overline{]-2;7]} = \begin{cases}]-2;7] \\ \text{ou} \\ ]-2,7[\end{cases}$$

Or on voit que $7 \notin \overline{]-2;7]}$ car :

$$\forall \epsilon > 0, 7 + \epsilon \notin]-2,7[$$

On a donc :

$$]-2,7[= \overline{]-2;7]}$$

2) Il suffit de voir que :

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

Partie B : Calcul direct

Exercice B.1 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) \quad L_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}} \quad L_3 = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2\right) \quad L_4 = \lim_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Ce sont des calculs :

$$\forall x > 0, x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = x\left[1 - \frac{\ln\left[x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]}{x}\right] = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ (par croissance comparée)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2)}{x} = 0$$

On en déduit donc que :

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = +\infty$$

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}(1+2xe^{-3x}+7xe^{-3x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(1+2xe^{-3x}+7xe^{-3x})}{1+e^{-2x}} = +\infty$$

On rappelle par croissance comparée que :

$$\lim_{x\to+\infty} 2xe^{-3x} = 0$$

$$L_3 = \lim_{x\to+\infty} \quad x\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2\right) = \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X}\left(e^X + e^{2X} - 2\right) = \lim_{X\to0^+} \frac{e^X - 1}{X} + \lim_{X\to0^+} \frac{e^{2X}-1}{X}$$

Or on sait que :

$$\lim_{X\to0^+} \frac{e^X-1}{X} = \lim_{X\to0^+} \frac{f(X)-f(0)}{X-0} = f'(0) = 1$$

De même on a :

$$\lim_{X\to0^+} \frac{e^{2X}-1}{X} = \lim_{X\to0^+} \frac{g(X)-g(0)}{X-0} = g'(0) = 2$$

On a donc :

$$L_3 = \lim_{x\to+\infty} \quad x\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2\right) = 3$$

$$L_4 = \lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$$

En effet :

$$\forall x > 1, \frac{1}{x} \in]0;1[\Longrightarrow \forall x > 1, \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$$

Exercice B.2 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1 = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3} \;;\; L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor} \;;\; L_3 = \lim_{x\to0} \quad \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$L_1 = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \times \frac{x-1}{\sqrt{2x+7}-3}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \times \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{2x+7}-3}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \; avec\; f(x) = \sqrt{x+3}$$

Comme f est dérivable en $x = 1$ on a :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{(1+3)}}=\frac{1}{4}$$

De même on a :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{3}\text{ avec } g(x)=\sqrt{2x+7}$$

On a donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{2x+7}-3}=3$$

On a donc :

$$L_1=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}=\frac{3}{4}$$

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$$

On sait que :

$$\forall x>0, x-1<\lfloor x\rfloor\le x$$

On a donc :

$$\forall x>0, 0\le\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}\le\frac{1}{2\lfloor x\rfloor}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\lfloor x\rfloor}=0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}=0$$

$$L_3=\lim_{x\to0}\ \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\times x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Or on sait que :

$$\forall x\neq0, -|x|\le x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le|x|$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\sin'(0)=1$$

On a donc :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\times x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}\times\lim_{x\to0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$$

D'après le théorème des gendarmes.

Exercice B.3 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\ x\sin(x)\quad;\quad L_2=\lim_{x\to0}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{1}{x}\rfloor}}{x}\quad;\quad L_3=\lim_{x\to0}\ \cos(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dans tout cet exercice aucune limite n'existe. Pour démontrer cela il faut utiliser la définition séquentielle des suites !

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\ x\sin(x)$$

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}u_n=2\pi n\\ v_n=2\pi n+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

On a :

$$\lim_n u_n=\lim_n v_n=+\infty$$

Cependant on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = 0 \to 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, f(v_n) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$$

D'après la propriété séquentielle de la limite, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}}{x}$$

De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2n} \\ v_n = \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$$

$$\lim_n u_n = \lim_n v_n = 0$$

Cependant on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = 2n \to +\infty \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, f(v_n) = -(2n+1) \to -\infty$$

D'après la propriété séquentielle de la limite, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \cos(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2\pi n} \\ v_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = \cos(u_n)\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \cos\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \to 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(v_n) = \cos(v_n)\cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \cos\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) \times 0 = 0 \to 0$$

D'après la propriété séquentielle de la limite, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice B.4 : Etudier la limite (éventuellement à gauche et à droite) de chacune des expressions suivantes au point considéré :

$$\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} \text{ en } a \quad ; \quad \frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} \text{ en } 1 \quad ; \quad \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \text{ en } 0$$

1) On sait que :

$$\forall (x,a) \in \mathbb{C}^2, x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$
$$\forall (x,a) \in \mathbb{C}^2, x^2-(a+1)x+a = (x-a)(x-1)$$

On a donc :

$$\forall (x,a) \in \mathbb{C}^2, x \neq a, \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \frac{x-1}{x^2+ax+a^2}$$

1er cas : Si a ≠ 0 on a :

$$\lim_{x\to a} x^2+ax+a^2 = \lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim_{x\to a} \frac{x-1}{x^2+ax+a^2} = \frac{a-1}{3a^2}$$

2ième cas : Si a = 0 on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x^3} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^3} = +\infty$$

2) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$$

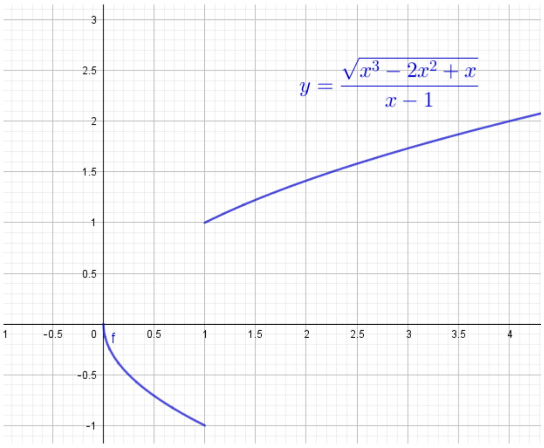
On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x \neq 1, \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = \frac{|x - 1|}{x - 1}\sqrt{x}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = 1$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = -1$$

On peut le voir sur la courbe ci-dessous :



3) On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x}}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x}}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$$
$$= f'(0) - g'(0)$$

Avec $f: x \mapsto \sqrt{1 + x}$ et $g: x \mapsto \sqrt{1 - x}$

On a donc :

$$\forall x \geq -\frac{1}{2}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$\forall x \leq \frac{1}{2}, g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1 - x}} \Longrightarrow g'(0) = -\frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = 1$$

Remarque : On aurait pu voir aussi que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} \text{ avec } h(x) = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$$

On a alors :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x}} \Longrightarrow h'(0) = 1$$

Exercice B.5 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

$$L_1 = \lim_{x \to \alpha} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(\alpha)}{x^2 - \alpha^2} \qquad L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} \qquad L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

1) On a :

$$L_1 = \lim_{x \to \alpha} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(\alpha)}{x^2 - \alpha^2} = \lim_{x \to \alpha} \frac{[\sin(x) - \sin(\alpha)][\sin(x) + \sin(\alpha)]}{(x - \alpha)(x + \alpha)}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{[\sin(x)-\sin(\alpha)]}{(x-\alpha)}=\cos(\alpha)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{[\sin(x)+\sin(\alpha)]}{(x+\alpha)}=\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}\ \text{si}\ \alpha\neq 0\\ \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{[\sin(x)+\sin(\alpha)]}{(x+\alpha)}=1\ \text{si}\ \alpha=0\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$L_1=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin^2(x)-\sin^2(\alpha)}{x^2-\alpha^2}=\begin{cases}\dfrac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}\ \text{si}\ \alpha\neq 0\\ 1\ \text{si}\ \alpha=0\end{cases}$$

2) On a :

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{x}\times\frac{x}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x)}$$
$$=\frac{5}{\cos^2(5\times 0)}\times\frac{1}{2\cos(2\times 0)}=\frac{5}{2}$$

3) On sait que :

$$L_3=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\times\frac{1+\cos(x)}{2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Partie C : Extrait de concours SUP-SPE

Exercice C.1 (Optima SUP-SPE 2016) : Soit f une fonction décroissante, définie sur $]0;1]$ telle que :

$$\forall\, x\in]0;1],\ 1-x\leq f(x)\leq 2+x$$

Montrer que f admet une limite en 0.

Il suffit de voir que f est bornée sur $]0;1]$. On pose:

$$m=inf\{f(x)\,;x\in\,]0;1]\}$$

Comme f est décroissante et :

$$\forall x\in\,]0;1],\ 0\leq f(x)\leq 3$$

On a alors :
$m=inf\{f(x)\,;x\in\,]0;1]\}$ existe.
Comme f est décroissante on a :

$$m=sup\{f(x)\,;x\in\,]0;1]\}=\lim_{x\to 0}f(x)$$

Exercice C.2 (CCP PC 2015) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point $x_0\in\overset{o}{I}$, $\ell\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I telle que

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$$

a) Soient a et b deux réels tels que $a<\ell<b$. Montrer que :

$$\exists\,\mu>0,\forall\,x\in\,]x_0-\mu;x_0+\mu[,\ a<f(x)<b$$

b) Soit α un réel tel que $\ell\neq\alpha$. Montrer que :

$$\exists\,\mu>0,\forall\,x\in\,]x_0-\mu;x_0+\mu[,\ f(x)\neq\alpha$$

1) On sait que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On a donc :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x - c| \leq \delta \implies \ell - \epsilon \leq f(x) \leq \ell + \epsilon$$

Or on sait que :

$$a < \ell < b$$

Il suffit de poser $\epsilon = \frac{1}{2} \times \min(\ell - a; b - \ell)$.

On a bien :

$$\begin{cases} \epsilon > 0 \\ \ell - \epsilon > a \\ \ell + \epsilon < b \end{cases}$$

On a donc :

$$\exists \mu > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \mu, a < \ell - \epsilon \leq f(x) \leq \ell + \epsilon < b$$

Or on sait que :

$$|x - x_0| \leq \mu \Leftrightarrow x \in [x_0 - \mu; x_0 + \mu]$$

On a donc :

$$\exists\, \mu > 0, \forall\, x \in [x_0 - \mu; x_0 + \mu], a < f(x) < b$$

2) Ici il suffit de poser :

$$\epsilon = \frac{|\ell - \alpha|}{2} > 0 \text{ car } \ell \neq \alpha$$

On a donc :

$$\begin{gathered} \exists\, \mu > 0, \forall\, x \in [x_0 - \mu; x_0 + \mu], \ell - \epsilon \leq f(x) \leq \ell + \epsilon \\ \implies \exists\, \mu > 0, \forall\, x \in [x_0 - \mu; x_0 + \mu], |f(x) - \alpha| > 0 \\ \implies \exists\, \mu > 0, \forall\, x \in |x_0 - \mu; x_0 + \mu|, f(x) \neq \alpha \end{gathered}$$