Chapitre 15 : Calcul matriciel
Partie A : Généralités

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Ensemble de matrices

a) L'ensemble $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Définition : Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes. On dit alors que qu'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de dimension $p \times q$.

Exemple I.a.1 : Donner une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Définition (coefficients d'une matrice) : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On note alors $a_{i,j}$ le coefficient à la i-ième ligne et j-ième colonne. On note alors :

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

Exemple I.a.2: Déterminer $a_{3,2}$ pour la matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ de l'exemple I.a.1

Remarque : Si $= q$, on dit que $A \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à p lignes et p colonnes.

Exemple I.a.3 : Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition (matrice ligne et matrice colonne) : On dit que A est une matrice ligne si et seulement si :

$$A \in \mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{K})$$

On dit que A est une matrice colonne si et seulement si :

$$A \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

Exemple I.a.4 : Donner une matrice ligne et une matrice colonne.

b) Somme de deux matrices

Définition (somme de deux matrices) : Soit $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^2$. On pose :

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \text{ et } B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

On définit alors la somme $A + B$:

$$A + B = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

ATTENTION : On ne peut faire la somme de deux matrices que si A et B ont même nombre de lignes et de colonnes.

Exemple I.b.1 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 5 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Déterminer la matrice $A + B$

Définition (matrice nulle) : La matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ composée que de 0 est appelée <u>matrice nulle</u> et s'écrit $0_{p,q}$.
0_p désigne la matrice nulle de l'ensemble des matrices carrées de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Exemple I.b.2 : Ecrire les matrices $0_{2,3}, 0_4, 0_{5,2}$.

Propriété I.b.3 : L'addition dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:
1) est associative :

$$\forall (A, B, C) \in \left(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^3, (A + B) + C = A + (B + C)$$

2) est commutative :

$$\forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^2 A + B = B + A$$

3) admet un élément neutre qui est la matrice nulle :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A + 0_{p,q} = A$$

4) est telle que tout élément $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ admet un inverse :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \exists B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A + B = B + A = 0_{p,q}$$

On note alors :

$$A = -B$$

c) Produit d'une matrice par un scalaire

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire) : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Exemple I.c.1 : : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer 3A.

Propriété I.c.2 : On a :
1) On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^2, \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

2) On a :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

3) On a :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

II) Produit de matrices

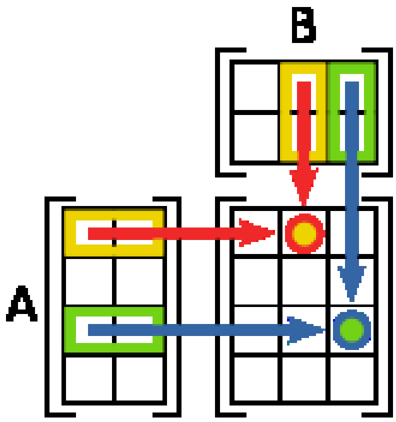
a) Une définition pas si simple

Définition : Soient $(p, q, r) \in \mathbb{K}^3$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On pose :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \text{ et } B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

On définit alors la somme $A \times B$:

$$A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \text{ avec } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$



Exemple II.a.1 : Déterminer si cela est possible le produit matriciel de A par B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 6 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple II.a.2 : Déterminer deux matrices A et B de tailles différentes où le produit de A par B est possible et effectuez ce produit :

Propriété II.a.3 : On a :
1) La produit matriciel est associatif :
$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC)$$
2) Le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition :
$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}), (A+B)C = AC + BC$$
$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}), A(B+C) = AB + AC$$
3) On a :
$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

ATTENTION : Le produit matriciel n'est pas commutatif, la commutativité n'est même pas définit !!

Contre-exemple II.a.4 : Donner deux matrices A et B dont les produits $A \times B$ est définit, les produits $B \times A$, mais où le résultat est différent !

b) Application à la résolution de système linéaire

Remarque : Lorsque $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, le produit obtenue AB est une matrice colonne combinaison linéaire des colonnes de A.

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{q,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \implies AB = b_{1,1}C_1 + b_{2,1}C_2 + \cdots + b_{q,1}C_q$$

Ici on représente les colonnes de A par $(C_i)_{1 \le i \le p}$:
$$\forall i \in [\![1;p]\!], C_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{p,i} \end{pmatrix}$$

On a de même :
Lorsque $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, le produit obtenue BA est une matrice ligne combinaison linéaire des lignes de A.

$$\begin{aligned} B = (b_{1,1} \quad \cdots \quad b_{1,p}) \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \implies BA &= (b_{1,1} \quad \cdots \quad b_{1,p}) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} \\ &= b_{1,1}L_1 + b_{1,2}L_2 + \cdots + b_{1,p}L_p \\ &= b_{1,1}(a_{1,1} \quad \cdots \quad a_{1,p}) + \cdots + b_{1,p}(a_{p,1} \quad \cdots \quad a_{p,q}) \end{aligned}$$

On peut alors définir un système linéaire comme une équation produit de matrice.
$$\begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,q}\mathbf{x_q} = b_1 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,q}\mathbf{x_q} = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p,1}\,\mathbf{x_1} + a_{p,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{p,q}\mathbf{x_q} = b_q \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Exemple II.b.1 : Mettre le système suivant sous forme de produit matriciel :
$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 7x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 10y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

III) Transposée d'une matrice

a) Définition

Définition : Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, notée A^T ou ${}^tA$, la matrice :

$$A^T=(a_{j,i})_{\substack{1\leq j\leq q\\1\leq i\leq p}}\in\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q}\\ a_{2,1} & & & a_{2,q}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,q}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\Leftrightarrow A^T=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{p,1}\\ a_{1,2} & & & a_{2,q}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{1,q} & a_{2,q} & \cdots & a_{p,q}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$$

Exemple III.a.1 : On pose : $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\\ 6 & 2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. Déterminer A^T.

Propriété III.a.2 : On a :
- $\forall A\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}):(A^T)^T=A$
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\forall(A,B)\in\left(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\right)^2\ (\lambda A+\mu B)^T=\lambda A^T+\mu B^T$
- $\forall A\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\forall B\in\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),(AB)^T=B^TA^T$

b) Matrices symétriques et antisymétriques

Définition : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :
- A est symétrique si et seulement si $A^T=A$
- A est antisymétrique si et seulement si $A^T=-A$

Exemple III.b.1 : Donner une matrice symétrique et antisymétrique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Notation : On pose $S_n(\mathbb{K})$ $\left(\text{resp.}\ A_n(\mathbb{K})\right)$ l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$S_n(\mathbb{K})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K});A^T=A\}\text{ et }A_n(\mathbb{K})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K});A^T=-A\}$$

Propriété III.b.2 : $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaire mais pas par produit.

Propriété III.b.3 : On a :

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\exists!\,(S,A)\in S_n(\mathbb{K})\times A_n(\mathbb{K})\text{ tels que }M=S+A$$