Chapitre 15 : Calcul matriciel
Partie C : Les matrices inversibles

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Opérations élémentaires

a) Les matrices de élémentaires

Définition : Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On appelle matrice élémentaire $E_{i,j}$ la matrice définie par :

$$E_{i,j} = (e_{k,l})_{1\leq k,l\leq n} \text{ avec } e_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } (k,l) = (i,j) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple I.a.1 : Déterminer $E_{2,3}$ et $E_{4,3}$ dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

Propriété I.a.2 : On a : $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4, E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On appelle trace de A, noté $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Exemple I.a.3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Tr}(A)$.

Application I.a.4 : Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM) \Longrightarrow A = B$$

b) Matrices d'opérations élémentaires

Définition (Opérations élémentaires) : On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système (ou d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul. On note cela : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$
- Echanges des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$. On note cela : $L_i \longleftrightarrow L_j$
- Ajout de βL_j à L_i avec $i \neq j$. On note cela : $L_i \longleftarrow l_i + \beta L_j$

Rappel : On dit que deux matrices A et B sont équivalentes en lignes, noté $A \underset{(L)}{\sim} B$ si et seulement si il existe une succession finie d'opérations élémentaires sur les colonnes de A pour passer à B.

Définition (Matrices d'opérations élémentaires) : Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On appelle matrices d'opérations élémentaires l'une des trois matrices suivantes :

- Matrice de <u>dilatation</u> :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, D_i(\lambda) = I_n - (\lambda - 1)E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Matrice de <u>transposition</u>

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Matrice de transvection

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & \lambda & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple I.b.1 : Déterminer $D_3\left(\frac{1}{2}\right)$, $P_{3,5}$ et $T_{4,2}(4)$ dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$

Propriété I.b.2 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :
- $\forall i \in [\![1,p]\!], D_i(\lambda)A = B$ où B est la matrice obtenue en appliquant $L_i \longleftarrow \lambda L_i$
- $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, P_{i,j}A = B$ où B est la matrice obtenue en appliquant $L_i \longleftarrow L_j$
- $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, T_{i,j}(\lambda)A = B$ où B est la matrice obtenue en appliquant $L_i \longleftarrow C_i + \lambda L_j$

Exemple I.b.3 : On pose : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer trois matrices telles que :

$$M_1 \times M_2 \times M_3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriété I.b.4 : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E produit d'opérations élémentaires et une unique matrice échelonnée par ligne R telle que :

$$E \times A = R$$

Exemple I.b.5 : On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice E produit d'opérations élémentaires telle que :

$$E \times A = I_3$$

c) Matrices équivalentes en colonne

Remarque : On peut faire les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice en multipliant à droite une matrice par les matrices d'opérations élémentaires :

Propriété I.c.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On a :
- $\forall i \in [\![1,q]\!], AD_i(\lambda) = B$ où B est la matrice obtenue en appliquant $C_i \longleftarrow \lambda C_i$
- $\forall (i,j) \in [\![1,q]\!]^2, AP_{i,j} = B$ où B est la matrice obtenue en appliquant $C_i \longleftarrow C_j$
- $\forall (i,j) \in [\![1,q]\!]^2, AT_{i,j}(\lambda) = B$ où B est la matrice obtenue en appliquant $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$

Exemple I.c.2 : On pose : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer trois matrices telles que :

$$A \times M_1 \times M_2 \times M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Définition : On dit que deux matrices A et B sont équivalentes en colonnes, noté $A \underset{(C)}{\sim} B$ si et seulement si il existe une succession finie d'opérations élémentaires sur les colonnes de A pour passer à B.

Propriété I.c.3 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E produit d'opérations élémentaires et une unique matrice échelonnée par ligne R telle que :

$$A \times E = R$$

Exemple I.c.4 : On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice E produit d'opérations élémentaires telle que :

$$A \times E = I_3$$

II) Matrices inversibles

a) Seulement les matrices carrées

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

Notation : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,;\, \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA\}$$

Exemple II.a.1 : $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $O_n \notin GL_n(\mathbb{K})$

Remarque : La définition d'une matrice inversible n'est valable que pour les matrices carrées !!!

Propriété II.a.2 : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors il existe une unique matrice B telle que $AB = BA = I_n$. On note alors $B^{-1} = A$ et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$.

Application II.a.3 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 5A + 4I_3$ puis en déduire que $A \in GL_3(\mathbb{K})$.

b) Cas des matrices n=2

Propriété II.b.1 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors :

$$A \in GL_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc \neq 0 \\ A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

On appelle $ad - bc$ le déterminant de A que l'on note $\det(A) = ad - bc$

Application II.b.2 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x - 3y = 8 \end{cases}$$

c) Inverse d'une matrice d'opérations élémentaires et produit de matrices inversibles

Propriété II.c.1 : Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles et de même nature. Plus précisément :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
- $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$
- $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$

Application II.c.2 : a) On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer A^{-1}.

b) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ -2x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Propriété II.c.3 : Soit $(A_1, \dots ; A_p) \in (GL_n(\mathbb{K}))^p$. Alors :
$$A_1 \times \dots \times A_p \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (A_1 \times \dots \times A_p)^{-1} = A_p^{-1} \times \dots \times A_1^{-1}$$

Application II.c.4 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E' produit d'opérations élémentaires et une unique matrice échelonnée par ligne R telle que :
$$A = E' \times R$$

c) Caractérisation des matrices inversibles

Propriété II.c.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :
1) A est une matrice inversible
2) Il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A'A = I_n$
3) Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution $X = 0_{n,1}$
4) Le rang de la matrice A est n
5) $A \underset{L}{\sim} I_n$
6) Pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
7) Pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

Application II.c.2 : Toute matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si le produit des diagonales est différents de 0 :
$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{n,n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow a_{1,1} \times a_{2,2} \times a_{n,n} = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k} \neq 0$$

Propriété II.c.3 : On a équivalence entre :
$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{K}), AB = I_n \Leftrightarrow \exists B' \in GL_n(\mathbb{K}), B'A = I_n$$

Propriété II.c.4 : Toute matrice inversible est le produit de matrices d'opérations élémentaires. On dit que le groupe linéaire $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ est engendré par les matrices d'opérations élémentaires.

d) Calcul de l'inverse par système linéaire ou Gauss-Jordan

Remarque : On a vu que :
$$\begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,q}\mathbf{x_q} = b_1 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,q}\mathbf{x_q} = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p,1}\,\mathbf{x_1} + a_{p,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{p,q}\mathbf{x_q} = b_q \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Si le système est carrée et $A \in GL_n(\mathbb{K})$ on a :
$$\begin{cases} a_{1,1}\,\mathbf{x_1} + a_{1,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1,n}\mathbf{x_n} = b_1 \\ a_{2,1}\,\mathbf{x_1} + a_{2,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2,n}\mathbf{x_n} = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}\,\mathbf{x_1} + a_{n,2}\,\mathbf{x_2} + \cdots + a_{n,n}\mathbf{x_n} = b_n \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

On peut donc se servir de la résolution d'un système linéaire pour déterminer l'inverse d'une matrice.

Application II.d.1 : Déterminer A^{-1} avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : On peut aussi utiliser l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan avec I_n.

Application II.d.2 : Calculer A^{-1} avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$