Fiche TD 15 : Calcul matriciel

Partie A : Se familiariser avec le calcul

Exercice A.1 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer AB et BA puis $3A + B$.

Exercice A.2 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer quel produit est autorisé et calculez-le.

Exercice A.3 : Résoudre l'équation :

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie B : Les matrices carrées

Exercice B.1 (Matrices élémentaires) : On appelle matrice élémentaire $E_{l,k}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$E_{l,k} = \left(e_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \text{ avec } e_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (l,k) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice élémentaire $E_{2,3}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
b) Pour tout $(k, \ell, k', \ell') \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer que vaut le produit :

$$E_{\ell,k} \times E_{\ell',k'}$$

Exercice B.2 : On pose :

$$Z = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

a) Déterminer deux matrices de Z.
b) A l'aide des matrices élémentaires, déterminer Z.

Exercice B.3 : On dit que $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si est seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} \geq 0$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1) Donner une matrice stochastique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
2) Soit A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall \lambda \in [0; 1], \lambda A + (1 - \lambda)B$ et AB sont stochastiques.

Exercice B.4 (La Trace) : On définit :

$$\forall A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

1) On pose : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Tr}(A)$.
2) Montrer que :

$$\forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

3) En déduire que $\forall (A; B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, AB - BA \neq I_n$

Exercice B.5 : On définit :

$$\forall A = \left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Soit $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$
Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM) \Longrightarrow A = B$$

Exercice B.6 : Calculer $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{100}$.

Exercice B.7 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice B.8 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$.
2) En déduire M^n pour tout entier naturel n.
3) On pose les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) tels que :

$$(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

Déterminer une expression de chaque suite en fonction de n.

Exercice B.9 (Oral ccp PSI 2016) : Soit a un réel. On pose :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

1) Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, M(a) \times M(b) = M(a + b - 3ab)$$

2) Trouver une suite (u_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M(a)^n = M(u_n)$$

Exercice B10 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice B11 (Oral Mines-Ponts Psi 2014) : Soit a un réel non nul. Calculer A^n pour n entier naturel et a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice B.12 : Calculer A^n avec A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie C : Calcul de l'inverse par polynôme ou astuce

Exercice C.1 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$

b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice C.2 : On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 2A + 2I_2$.

b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

c) Retrouver ce résultat grâce à la formule.

Exercice C.3 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $(A + I_3)^3$

2) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$

Exercice C.4 : Soit n un entier supérieur ou égale à 2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leq k,l\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1) Calculer $A\overline{A}$.

2) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice C.5 : Calculer si cela est possible l'inverse de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie D : Par un système linéaire ou Gauss-Jordan

Exercice D.1 : Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice D.2 : Déterminer si les matrices suivantes en discutant suivant le paramètre réel α puis calculer leur inverse.

a) $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ | b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ | c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$.

Exercice D.3 : On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

b) Montrer que : $D = P^{-1}AP$ est diagonale, puis calculer D^n

c) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

d) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} (u_0, v_0, w_0) = (3,1,5) \\ u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - 2w_n \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite des suites u, v et w.

Exercice D.4 (Matrice à diagonale dominante) : Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \left|a_{i,i}\right| > \sum_{\substack{j\neq i \\ j\in[\![1,n]\!]}} \left|a_{i,j}\right| \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$$

Exercice D.5 : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
b) Calculer $P^{-1}AP$. En déduire alors A^n pour tout n entier naturel.
c) On pose les suites (u_n) et (v_n) définie par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{cases}$$

Donner la formule explicite de u_n et v_n en fonction de n.
d) On considère les équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases}$$

Résoudre de deux manières différentes cette équation différentielle.

Partie E: Matrices symétriques

Exercice E.1 : Soient $(n,p,m) \in (\mathbb{N}^*)^3, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), (B,C) \in \left(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\right)^2$
1) Montrer que :

$$AA^T = 0_n \Rightarrow A = 0_{n,p}$$

2) Montre que :

$$BAA^T = 0_{m,n} \Rightarrow BA = 0_{m,p}$$

3) Montrer que :

$$BAA^T = CAA^T \Rightarrow BA = CA$$

Exercice E.2 : On veut montrer que $A \in A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow (I_n + A) \in GL_n(\mathbb{R})$
1) Soit X un vecteur colonne. Montrer que $X^tX \in [0; +\infty[$
2) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_n + A)X = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$
3) En déduire que $(I_n + A) \in GL_n(\mathbb{R})$
4) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. On pose $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Montrer que $M^{-1} = M^T$