Programme de Colle n°15
(19 au 23 janvier 2026)

Continuité en un point

b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Image d'un segment par une fonction continue.	

© Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, 2021
https://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Contenus	Capacités & Commentaires
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
d) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Calcul matriciel

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

d) Ensemble des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	

Questions de cours

Propriété IV.c.1 (caractérisation séquentielle de la limite) : Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \; tel\ que \lim_{n\to+\infty} u_n = a \, , \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell\right)$$

Propriété III.a.1 (Théorème des valeurs intermédiaires version 1) : Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f(a)f(b) < 0. Alors il existe $x_0 \in]a: b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Propriété III.b.3 : On a :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{K}), \exists! \, (\mathrm{S}, \mathrm{A}) \in \mathrm{S}_\mathrm{n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K}) \text{ tels que } \mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$$

Propriété III.a.2 : On a :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\mathrm{p,q}}(\mathbb{K}), \forall \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{\mathrm{q,r}}(\mathbb{K}), (\mathrm{AB})^\mathrm{T} = \mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}$$

Application II.a.2 : On pose : : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En exprimant A^2 à l'aide de A et de I_3, déterminer A^n.

Application I.a.4 : Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Tr(AM) = Tr(BM) \Longrightarrow A = B$$

Exercices types

- Convergence de suites implicites
- Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1]; [0; 1])$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice C.1 : Déterminer toutes les fonctions continues sur l'intervalle considéré vérifiant les relations fonctionnelles suivantes :

$a) \ \forall\, x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$

$b) \ \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = f(x)$

$c) \ \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x) \quad \left(On\ poura\ prendre\ \left(x^{2^n}\right) et \left(x^{2^{-n}}\right)\right)$

$d) \ \forall\, x \in [0; 1], f(x^2) \leq f(x)\ et\ f(0) = f(1) \quad \left(On\ poura\ prendre\ \left(x^{2^n}\right) et \left(x^{2^{-n}}\right)\right)$

$e) \forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x) \quad \left(Etudier\ la\ suite\ définie\ par\ u_0 = x\ et\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}\right)$

Exercice C.2 : Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations fonctionnelles suivantes :

$a) \ \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$

$b) \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$

$c) \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$

Exercice A.1 : On pose :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer AB et BA puis 3A + B.

Exercice A.2 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer quel produit est autorisé et calculez-le.

Exercice A.3 : Résoudre l'équation :

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$Z_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

Déterminer Z_n.