Fiche TD 15 : Calcul matriciel

Partie A : Se familiariser avec le calcul

Exercice A.1 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer AB et BA puis 3A + B.

On a :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -19 & -15 \end{pmatrix}$$

De même :

$$B \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 26 & -18 \end{pmatrix}$$

Remarque : On illustre ici que le produit n'est pas commutatif sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!!!

De même on a :

$$3A + B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice A.2 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer quelle produit est autorisé et calculez-le.

On voit que :

$$A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

On ne peut donc effectuer que le produit $B \times A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$B \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 21 & 27 & 33 \end{pmatrix}$$

Exercice A.3 : Résoudre l'équation :

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} a^2 + bc - 2a & ab + bd - 2b \\ ca + dc - 2c & cb + d^2 - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} a^2 + bc - 2a = -1 \\ ab + bd - 2b = 0 \\ ca + dc - 2c = 6 \\ cb + d^2 - 2d = 3 \end{cases}$$

On regarde la deuxième équation :

$$ab + bd - 2b = 0 \Leftrightarrow b(a + d - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \text{ou} \\ a + d - 2 = 0 \end{cases}$$

1er cas : b = 0

Le système devient :

$$\begin{cases} a^2 - 2a = -1 \\ b = 0 \\ ca + dc - 2c = 6 \\ d^2 - 2d = 3 \end{cases}$$

On résout les équations :

$$a^2 - 2a = -1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$d^2 - 2d = 3 \Leftrightarrow d = \begin{cases} -1 \\ \text{ou} \\ 3 \end{cases}$$

On regarde alors la troisième équation :

_ Si $d = -1$:

$$ca + dc - 2c = 6 \Leftrightarrow c = -3$$

_ Si $d = 3$

$$ca + dc - 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$$

On a donc :

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ sont solutions.

$2^{\text{ième}}$ cas : Si $b \neq 0$, alors $a + d - 2 = 0$

On a alors :

$$\begin{cases} a^2 + bc - 2a = -1 \\ a + d = 2 \\ 0 = 6 \\ cb + d^2 - 2d = 3 \end{cases}$$

Cela est impossible !!!

Donc a donc :

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie B : Les matrices carrées

Exercice B.1 (Matrices élémentaires) : On appelle matrice élémentaire $E_{l,k}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$E_{l,k} = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec } e_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (l,k) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice élémentaire $E_{2,3}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Pour tout $(k, \ell, k', \ell') \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer que vaut le produit :

$$E_{\ell,k} \times E_{\ell',k'}$$

a) On a :

$$E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On pose :

$$E_{\ell,k} = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$E'_{\ell',k'} = (e'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

On a alors :

$$E_{\ell,k} \times E_{l',k'} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec :}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} e_{i,p} e'_{p,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq \ell \\ 0 \text{ si } j \neq k' \\ e_{l,k} \times e'_{k,k'} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = \ell' \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$E_{\ell,k} \times E_{l',k'} = \begin{cases} 0_n \text{ si } k \neq \ell' \\ E_{\ell,k'} \text{ si } k = \ell' \end{cases} = \delta_{k,\ell'} E_{\ell,k'}$$

Exercice B.2 : On pose :

$$Z = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

a) Déterminer deux matrices de Z.
b) A l'aide des matrices élémentaires, déterminer Z.

a) On cherche l'ensemble des matrices qui commutent avec tout le monde !!
Il suffit de prendre 0_n et I_n. On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \times 0_n = 0_n = 0_n \times A$$

De même on a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \times I_n = A = I_n \times A$$

Donc :

$$\{0_n ; I_n\} \sqsubset \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

b) On pose :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

M est donc une matrice qui commutent avec tout le monde.
On pose $(k, \ell) \in [\![1; n]\!]^2$ et $E_{k,\ell} = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice élémentaire. On a donc :

$$E_{k,\ell} \times M = M \times E_{k,\ell}$$

Or on pose :

$$E_{k,\ell} \times M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, M \times E_{k,\ell} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} e_{i,p} m_{p,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ m_{k,j} \text{ si } i = k \end{cases}$$

De même on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, b_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} m_{i,p} e_{p,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq \ell \\ m_{i,\ell} \text{ si } j = \ell \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$E_{k,\ell} \times M = M \times E_{k,\ell} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, m_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq \ell \\ m_{k,k} \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\} = \{\lambda I_n \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice B.3 : On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si est seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} \geq 0$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1) Donner une matrice stochastique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
2) Soit A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall \lambda \in [0; 1], \lambda A + (1 - \lambda)B$ et AB sont stochastiques.

1) Il suffit de donner une matrice dont tous les coefficients sont positifs et où la somme des lignes est égale à 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stochastiques. On pose :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Soit $\lambda \in [0; 1]$. On a :

$$C = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n} = \lambda A + (1-\lambda)B = \left(\lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$$

Or on sait que

$$\forall \lambda \in [0;1], \lambda \ge 0 \text{ } et \text{ } 1-\lambda \ge 0$$

De même on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \ge 0 \text{ } et \text{ } b_{i,j} \ge 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, c_{i,j} \ge 0$$

On a de plus :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} [\lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j}] = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Donc $\lambda A + (1-\lambda)B$ est stochastique.
De même on pose :

$$D = AB = (d_{i,j})_{1\le i,j\le n}$$

On sait que :

$$\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \ge 0$$

On a donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$$

Donc AB est stochastique.

Exercice B.4 (La Trace) : On définit :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

1) On pose : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Tr}(A)$.

2) Montrer que :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

3) En déduire que $\forall (A;B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, AB - BA \ne I_n$

1) On a : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) = 5 + 1 - 2 = 4$

2) Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stochastiques. On pose :

$$A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}, B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$$

On pose :

$$AB = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$$

On sait que :

$$\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

On a donc :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} d_{k,i}$$

Avec :

$$\forall (i,k) \in [\![1;n]\!]^2, d_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n} d_{k,i} = \mathrm{Tr}(BA)$$

On a donc :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

3) Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = I_n$
On a alors :

$$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0 = \mathrm{Tr}(I_n) = n$$

C'est impossible. On en déduit donc que :

$$\forall (A;B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, AB - BA \neq I_n$$

Exercice B.5 : On définit :

$$\forall A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Soit $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$
Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM) \Longrightarrow A = B$$

Il faut travailler avec les matrices élémentaires ! On pose :
$A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, $B = \left(b_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $E_{k,\ell} = \left(e_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice élémentaire.
On a alors :

$$A \times E_{k,\ell} = \left(c_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \text{ et } B \times E_{k,\ell} = \left(d_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, c_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} e_{p,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq \ell \\ a_{i,k} \text{ si } j = \ell \end{cases}$$

De même on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, d_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} b_{i,p} e_{p,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq \ell \\ b_{i,k} \text{ si } j = \ell \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Tr}\left(A \times E_{k,l}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = a_{\ell,k} = \mathrm{Tr}\left(B \times E_{k,l}\right) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = b_{\ell,k}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{\ell,k} = b_{\ell,k}$$

Donc :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM) \Longrightarrow A = B$$

Exercice B.6 : Calculer $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{100}$.

Méthode 1 : Avec des suites

On pose :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_n + 4b_n & -4a_n - 3b_n \\ 5c_n + 4d_n & -4c_n - 3d_n \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}a_{n+1}=5a_n+4b_n\\ b_{n+1}=-4a_n-3b_n\\ c_{n+1}=5c_n+4d_n\\ d_{n+1}=-4c_n-3d_n\end{cases}$$

On remarque alors que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n=a_0+b_0=1\\ c_{n+1}+d_{n+1}=c_n+d_n=c_0+d_0=1\end{cases}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},a_{n+2}&=5a_{n+1}+4b_{n+1}\\&=5a_{n+1}+4(-4a_n-3b_n)\\&=5a_{n+1}-16a_n-12\left(\frac{a_{n+1}-5a_n}{4}\right)\\&=2a_{n+1}-a_n\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2-2r+1=0\Leftrightarrow r=1$$

On a donc :

$$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},a_n=(An+B)$$

Or sait que $a_0=B=1$ et $a_1=5=A+B\Longrightarrow\forall n\in\mathbb{N},a_n=4n+1$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},b_n=1-a_n=-4n$$

On a de même :

$$\forall n\in\mathbb{N},c_{n+2}-2c_{n+1}+c_n=0$$
$$\exists(A',B')\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},c_n=(A'n+B')$$

Or $c_0=0=B'$ et $c_1=A'=4$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},c_n=4n$$

Enfin on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},d_n=1-c_n=1-4n$$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},A^n=\begin{pmatrix}4n+1&-4n\\4n&1-4n\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}401&-400\\400&-399\end{pmatrix}$$

Méthode 2 : Par récurrence

On peut calculer les premiers termes de la puissance de A :

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}$$

On a $A^0=I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ par définition.

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}$$
$$A^2=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8\\8&-7\end{pmatrix}$$
$$A^3=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}9&-8\\8&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-12\\12&-11\end{pmatrix}$$

On peut alors conjecturer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},A^n=\begin{pmatrix}4n+1&-4n\\4n&1-4n\end{pmatrix}$$

Initialisation : Pour n=0, $A^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4\times0+1&-4\times0\\4\times0&1-4\times0\end{pmatrix}=I_2$$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & 1-4n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & 1-4n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20n-16n+5 & -16n-4+12n \\ 20n+4-16n & -16n-3+12n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4(n+1)+1 & -4(n+1) \\ 4(n+1) & 1-4(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie au rang n+1.

Conclusion : La proposition est vrai au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & 1-4n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut faire un programme Python pour illustrer ce propos !

```python
def matrice(A,n):
    import numpy as np
    B=A
    for i in range(1,n+1):
        B=np.dot(A,B)
    return (B)
```

On peut faire afficher les premiers termes :

```
>>> matrice(A,5)
[[ 9 -8]
 [ 8 -7]]
[[ 13 -12]
 [ 12 -11]]
[[ 17 -16]
 [ 16 -15]]
[[ 21 -20]
 [ 20 -19]]
[[ 25 -24]
 [ 24 -23]]
array([[ 25, -24],
       [ 24, -23]])
```

On a bien :

```
>>> matrice(A,99)
array([[ 401, -400],
       [ 400, -399]])
>>>
```

Exercice B.7 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x) & \operatorname{sh}(x) \\ \operatorname{sh}(x) & \operatorname{ch}(x) \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout entier naturel n.

a) On calculer les premiers termes :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conjecture alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>**Initialisation**</u> : Pour $n = 0$ on a $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

<u>**Hérédité**</u> : Soit n un entier naturel fixé. On suppose que la proposition est vraie au rang n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} + n & 1 & n+1 \\ n+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & 1 & n+1 \\ n+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc la proposition est héréditaire.

<u>**Conclusion**</u> :

: La proposition est vrai au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) On calculer les premiers termes :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) - 1 & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - 1 & \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta) & -\dfrac{1}{2}\sin(2\theta) & \cos(\theta) \\ -\dfrac{1}{2}\sin(2\theta) & -\sin^2(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta) & -\dfrac{1}{2}\sin(2\theta) & \cos(\theta) \\ -\dfrac{1}{2}\sin(2\theta) & -\sin^2(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 3, B^3 = 0_n$$

c) On a :

$$C=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x)\\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x)\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow C^2=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x)\\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x)\\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(2x) & \mathrm{sh}(2x)\\ \mathrm{sh}(2x) & \mathrm{ch}(2x)\end{pmatrix}$$

On rappelle que :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, \mathrm{ch}(a+b)=\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{sh}(a+b)=\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)+\mathrm{ch}(b)\mathrm{sh}(a)$$

On a donc :

$$C^3=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(2x) & \mathrm{sh}(2x)\\ \mathrm{sh}(2x) & \mathrm{ch}(2x)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x)\\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(3x) & \mathrm{sh}(3x)\\ \mathrm{sh}(3x) & \mathrm{ch}(3x)\end{pmatrix}$$

On conjecture alors que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, C^n=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx)\\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx)\end{pmatrix}$$

Initialisation : Comme $\mathrm{ch}(0)=1$ et $\mathrm{sh}(0)=0$ et $C^0=I_2$ on en déduit que la proposition est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose que :

$$C^n=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx)\\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx)\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$C^{n+1}=C^n\times C=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx)\\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x)\\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(nx)\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(nx)\mathrm{sh}(x) & \mathrm{sh}(nx)\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(nx)\mathrm{sh}(x)\\ \mathrm{sh}(nx)\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(nx)\mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(nx)\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(nx)\mathrm{sh}(x)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}((n+1)x) & \mathrm{sh}((n+1)x)\\ \mathrm{sh}((n+1)x) & \mathrm{ch}((n+1)x)\end{pmatrix}$$

Donc la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, C^n=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx)\\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx)\end{pmatrix}$$

Exercice B.8 : On pose :

$$M=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

1) Calculer $(M-I_3)(M+3I_3)$.
2) En déduire M^n pour tout entier naturel n.
3) On pose les suites (u_n), (v_n) et (w_n) tels que :

$$(u_0,v_0,w_0)\in\mathbb{R}^3, \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases}u_{n+1}=2u_n-2v_n+w_n\\ v_{n+1}=2u_n-3v_n+2w_n\\ w_{n+1}=-u_n+2v_n\end{cases}$$

Déterminer une expression de chaque suite en fonction de n.

1) On a :

$$(M-I_3)(M+3I_3)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$(M-I_3)(M+3I_3)=0_3$$

2) On a :

$$M^2+2M-3I_3=0_3\Longrightarrow M^2=-2M+3I_3$$

On suppose que :

$$\exists\big((u_n),(v_n)\big)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n\in\mathbb{N}, M^n=u_nM+v_nI_3$$

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $M^0 = I_3 \Longrightarrow u_0 = 0$ et $v_0 = 1$
Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose que :

$$M^n = u_n M + v_n I_3$$

On a alors :

$$\begin{aligned} M^{n+1} = u_n M^2 + v_n M &= u_n(-2M + 3I_3) + v_n M \\ &= (-2u_n + v_n)M + 3u_n I_3 \\ &= u_{n+1}M + v_{n+1}I_3 \end{aligned}$$

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\exists\big((u_n),(v_n)\big) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, M^n = u_n M + v_n I_3$$

On a de plus :

$$(u_0, v_0) = (0,1) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3u_n \\ &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0 \end{aligned}$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \Leftrightarrow r \in \{1; -3\}$$

On a donc :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-3)^n A + B$$

Or $u_0 = A + B = 0$ et $u_1 = -3A + B = 1$
On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{(-3)^n}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 - (-3)^n}{4}$$

De même on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3 \times \frac{1 - (-3)^{n-1}}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, M^n &= \frac{1-(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3+(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5-(-3)^n}{4} & \frac{(-3)^n - 1}{2} & \frac{1-(-3)^n}{4} \\ \frac{1-(-3)^n}{2} & (-3)^n & \frac{1-(-3)^n}{2} \\ \frac{(-3)^n - 1}{4} & \frac{1-(-3)^n}{2} & \frac{3+(-3)^n}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) On pose le système sous forme matriciel. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, M\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{5-(-3)^n}{4}u_0 + \frac{(-3)^n - 1}{2}v_0 + \frac{1-(-3)^n}{4}w_0 \\ v_n = \frac{1-(-3)^n}{2}u_0 + (-3)^n v_0 + \frac{1-(-3)^n}{2}w_0 \\ w_n = \frac{(-3)^n - 1}{4}u_0 + \frac{1-(-3)^n}{2}v_0 + \frac{3+(-3)^n}{4}w_0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, M\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice B.9 (Oral ccp PSI 2016) : Soit a un réel. On pose :

$$M(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ a & 1-2a & a\\ a & a & 1-2a\end{pmatrix}$$

1) Montrer que :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, M(a)\times M(b)=M(a+b-3ab)$$

2) Trouver une suite (u_n) tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, M(a)^n=M(u_n)$$

1) On a :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, M(a)\times M(b)=\begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ a & 1-2a & a\\ a & a & 1-2a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1-2b & b & b\\ b & 1-2b & b\\ b & b & 1-2b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1-2a)(1-2b)+2ab & (1-2a)b+a(1-2b)+ab & (1-2a)b+ab+a(1-2b)\\ a(1-2b)+(1-2a)b+ab & ab+(1-2a)(1-2b)+ab & ab+(1-2a)b+a(1-2b)\\ a(1-2b)+ab+(1-2a)b & ab+a(1-2b)+(1-2a)b & 2ab+(1-2a)(1-2b)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-2(a+b)+6ab & a+b-3ab & a+b-3ab\\ a+b-3ab & 1-2(a+b)+6ab & a+b-3ab\\ a+b-3ab & a+b-3ab & 1-2(a+b)+6ab\end{pmatrix}$$

2) On démontre cela par récurrence. On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}(n)\text{ "}M(a)^n=M(u_n)\text{":}$$

Initialisation $n=0$:

On a :

$$M(a)^0=I_3=M(0)$$

On a donc $u_0=0$.

Donc la proposition est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que :

$$M(a)^n=M(u_n)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}M(a)^{n+1}&=M(a)\times M(a)^n\\ &=M(a)\times M(u_n)\\ &=M(a+u_n-3u_na)=M(a+(1-3a)u_n)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire en posant $u_{n+1}=a+(1-3a)u_n$

Conclusion : On conclut par le principe de récurrence.

c) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=a+(1-3a)u_n\ et\ u_0=0$$

1er cas : $1-3a=0$

Si $a=\frac{1}{3}$, on en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{1}{3}\ et\ M\left(\frac{1}{3}\right)^n=M\left(\frac{1}{3}\right)$$

2ième cas : $1-3a=1$

On a alors $a=0$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=na\ et\ M(0)^n=I_3$$

3ième cas : $1-3a\notin\left\{0;\frac{1}{3}\right\}$

On a alors affaire à une suite arithmético-géométrique.

- On cherche le point fixe. On résout :

$$(1-3a)x+a=x\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

- On définit une suite auxiliaire. On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_n-\frac{1}{3}$$

On a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3}=(1-3a)u_n+a-\frac{1}{3}=(1-3a)\left(u_n-\frac{1}{3}\right)=(1-3a)v_n$$

On en déduit donc que la suite (v_n) est géométrique de raison $q=1-3a$ de premier terme $v_0=-\frac{1}{3}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1}{3}(1-3a)^n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M(a)^n = M\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n\right)$$

On remarque que le résultat reste valable pour $a = 0$ *et* $a = \frac{1}{3}$. On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, M(a)^n = M\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n\right)}$$

Exercice B10 : On pose :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{n} pour tout entier naturel n.

Méthode 1 : Avec le binôme de Newton

On pose :

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix} = 2\mathrm{J} - \mathrm{I_k}$$

Où k est le nombre de lignes de A.

Comme J et $\mathrm{I_n}$ commutent on peut utiliser le binôme de Newton :

$$\mathrm{A^n} = (2\mathrm{J} - \mathrm{I_k})^{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} (-1)^{\mathrm{n-i}} (2\mathrm{J})^{\mathrm{i}}$$

$$= \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} (-1)^{\mathrm{n-i}} 2^{\mathrm{i}} \times \mathrm{J^i}$$

On a :

$$\mathrm{J}^2 = \mathrm{kJ}$$

On démontre alors facilement par récurrence que :

$$\forall \mathrm{i} \geq 1, \mathrm{J^i} = \mathrm{k^{i-1}J}$$

On a donc :

$$\mathrm{A^n} = (2\mathrm{J} - \mathrm{I_k})^{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} 2^{\mathrm{i}} \times \mathrm{J^i} \times (-1)^{\mathrm{n-i}} (\mathrm{I_k})^{\mathrm{n-i}} = (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{I_k} + \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} (-1)^{\mathrm{n-i}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} 2^{\mathrm{i}} \times \mathrm{J^i}$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{I_k} + \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} (-1)^{\mathrm{n-i}} 2^{\mathrm{i}} \times \mathrm{k^{i-1}J}$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{I_k} + \left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} 2^{\mathrm{i}} \times \mathrm{k^{i-1}} (-1)^{\mathrm{n-i}}\right) \mathrm{J}$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{I_k} + \left(\frac{1}{\mathrm{k}} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} (-1)^{\mathrm{n-i}} 2^{\mathrm{i}} \times \mathrm{k^i}\right) \mathrm{J}$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{I_k} + \frac{1}{\mathrm{k}} \left(\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} (-1)^{\mathrm{n-i}} (2\mathrm{k})^{\mathrm{i}} - (-1)^{\mathrm{n}}\right) \mathrm{J}$$

$$= (-1)^n I_k + \frac{(2k-1)^n - (-1)^n}{k} J$$

Méthode 2 : Par récurrence

On peut calculer les premières puissances de matrices pour $k = 3$ par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

De même on a :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 41 & 42 & 42 \\ 42 & 41 & 42 \\ 41 & 42 & 41 \end{pmatrix}$$

On peut donc conjecturer que :

$$\exists (a_n, b_n), \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} a_n & & (b_n) \\ & \ddots & \\ (b_n) & & a_n \end{pmatrix}$$

Initialisation : Puisque $A^0 = I_k$ il suffit de poser $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose que :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & & (b_n) \\ & \ddots & \\ (b_n) & & a_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & & (b_n) \\ & \ddots & \\ (b_n) & & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n + 2(k-1)b_n & & 2a_n + (1 + 2(k-2))b_n \\ & \ddots & \\ (2a_n + (2 + k - 1)b_n) & & a_n + (k-1)b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} & & (b_{n+1}) \\ & \ddots & \\ (b_{n+1}) & & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2(k-1)b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + (2k-1)b_n \end{cases}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence on a :

$$\exists (a_n, b_n), \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} a_n & & (b_n) \\ & \ddots & \\ (b_n) & & a_n \end{pmatrix}$$

Il reste à déterminer les suites (a_n) et (b_n).

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2(k-1)b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + (2k-3)b_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} = a_{n+1} + 2(k-1)b_{n+1}$$

$$= a_{n+1} + 2(k-1)(2a_n + (2k-3)b_n)$$

$$= a_{n+1} + 4(k-1)a_n + (2k-3)(a_{n+1} - a_n)$$

$$= 2(k-1)a_{n+1} + (2k-1)a_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 2(k-1)a_{n+1} - (2k-1)a_n = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2-2(k-1)r-(2k-1)=0$$
$$\Delta=\left(2(k-1)\right)^2+4(2k-1)=4k^2-8k+4+8k-4=4k^2$$

On a donc :

$$r^2-2(k-1)r-(2k-1)=0 \Leftrightarrow r\in\{-1;2k-1\}$$

On en déduit donc que :

$$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2, a_n=(-1)^nA+(2k-1)^nB$$

On sait de plus que :

$$a_0=1=a_1$$

On a donc :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+(2k-1)B=1 \end{cases} \Longrightarrow B=\frac{2}{2k}=\frac{1}{k} \text{ et } A=\frac{k-1}{k}$$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\frac{(-1)^n(k-1)}{k}+\frac{(2k-1)^n}{k}=(-1)^n+\frac{(2k-1)^n-(-1)^n}{k}$$

On fait de même avec (b_n) et on trouve :

$$\forall n\in\mathbb{N}, b_n=\frac{(2k-1)^n-(-1)^n}{k}$$

Le mieux est de vérifier pour un certain k et un certain n. On prend ici $k=4$ et $n=3$ avec un programme Python ou à la main !!!

```
>>> a=np.array([[1,2,2,2],[2,1,2,2],[2,2,1,2],[2,2,2,1]])
>>> matrice(a,3)
array([[85, 86, 86, 86],
       [86, 85, 86, 86],
       [86, 86, 85, 86],
       [86, 86, 86, 85]])
>>>
```

On a $a_3=601$ et $b_3=600$

On calcule ensuite avec :

$$(-1)^3+\frac{(2\times4-1)^3-(-1)^3}{4}=-1+86=85$$

Exercice B11 (Oral Mines-Ponts Psi 2014) : Soit a un réel non nul. Calculer A^n pour n entier naturel et a :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule les premiers termes :

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & a & 2a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & 2a \\ \frac{2}{a^2} & \frac{2}{a} & 3 \end{pmatrix}$$

De même on a :

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} 2 & a & 2a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & 2a \\ \frac{2}{a^2} & \frac{2}{a} & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4a & 5a^2 \\ \frac{4}{a} & 3 & 5a \\ \frac{5}{a^2} & \frac{5}{a} & 7 \end{pmatrix}$$

On peut alors conjecturer que :

$$\exists\big((a_n),(b_n),(c_n),(d_n)\big), A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n a & c_n a^2 \\ \frac{b_n}{a} & a_n & c_n a \\ \frac{d_n}{a^2} & \frac{d_n}{a} & e_n \end{pmatrix}$$

<u>**Initialisation**</u> : On sait que :

$$A^0 = I_3 \Longrightarrow \text{En posant : } a_0 = d_0 = 1 \text{ et } b_0 = c_0 = 0$$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

<u>**Hérédité**</u> : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose que :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n a & c_n a^2 \\ \frac{b_n}{a} & a_n & c_n a \\ \frac{d_n}{a^2} & \frac{d_n}{a} & e_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} a_n & b_n a & c_n a^2 \\ \frac{b_n}{a} & a_n & c_n a \\ \frac{d_n}{a^2} & \frac{d_n}{a} & e_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_n + c_n & (a_n + c_n)a & (a_n + b_n + c_n)a^2 \\ \frac{a_n + c_n}{a} & b_n + c_n & (a_n + b_n + c_n)a \\ \frac{d_n + e_n}{a^2} & \frac{d_n + e_n}{a} & 2d_n + e_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} a & c_{n+1} a^2 \\ \frac{b_{n+1}}{a} & a_{n+1} & c_{n+1} a \\ \frac{d_{n+1}}{a^2} & \frac{d_{n+1}}{a} & e_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \\ d_{n+1} = d_n + e_n \\ e_{n+1} = 2d_n + e_n \end{cases}$$

<u>**Conclusion**</u> : On conclut par le principe de récurrence.

On résout d'une part les deux dernières équations :

$$\begin{cases} d_{n+1} = d_n + e_n \\ e_{n+1} = 2d_n + e_n \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+2} &= d_{n+1} + 2d_n + e_n \\ &= d_{n+1} + 2d_n + (d_{n+1} - d_n) \\ &= 2d_{n+1} + d_n \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+2} - 2d_{n+1} - d_n = 0$$

On résout :

$$(E_q): r^2 - 2r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 - \sqrt{2} \text{ ou } r = 1 + \sqrt{2}$$

On a donc :

$$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},d_n=A\left(1-\sqrt{2}\right)^n+B\left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

On sait de plus que $d_0=0\Longrightarrow A+B=0$

$$d_1=1\Longrightarrow A(1-\sqrt{2})+B(1+\sqrt{2})=A+B+\sqrt{2}(B-A)$$
$$\Longrightarrow B-A=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc :

$$\begin{cases}A+B=0\\A-B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Longrightarrow A=-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ et }B=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Donc on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},d_n=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

De plus on sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N},d_{n+1}=d_n+e_n\Longrightarrow e_n=d_{n+1}-d_n$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

Il reste à déterminer les suites $(a_n),(b_n),(c_n)$.
On sait que :

$$\begin{cases}a_{n+1}=b_n+c_n\\b_{n+1}=a_n+c_n\\c_{n+1}=a_n+b_n+c_n\end{cases}$$

On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N},a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$$
$$\Longrightarrow a_n-b_n=(-1)^n(a_0-b_0)=(-1)^n$$

De plus on a :

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n+2c_n$$
$$\Longrightarrow a_{n+2}+b_{n+2}=a_{n+1}+b_{n+1}+2(a_n+b_n+c_n)$$
$$=a_{n+1}+b_{n+1}+2(a_n+b_n)+a_{n+1}-b_n+b_{n+1}-a_n$$
$$=2(a_{n+1}+b_{n+1})+a_n+b_n$$

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},a_n+b_n=u_n$$

On a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}-2u_{n+1}-u_n=0$$

Donc :

$$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\forall n\in\mathbb{N},u_n=A\left(1-\sqrt{2}\right)^n+B\left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

Or on sait que $u_0=1$ et $u_1=1$. On en déduit donc que :

$$\begin{cases}A+B=1\\A\left(1-\sqrt{2}\right)+B\left(1+\sqrt{2}\right)=1\end{cases}\Longrightarrow A=B=\frac{1}{2}$$
$$\forall n\in\mathbb{N},u_n=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

On a donc :

$$\begin{cases}a_n-b_n=(-1)^n\\a_n+b_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n+\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\forall n\in\mathbb{N},a_n=\frac{(-1)^n+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n}{2}$$

De même on a :

$$\Longrightarrow\forall n\in\mathbb{N},b_n=\frac{(-1)^{n+1}+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n}{2}$$

On sait de plus que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = a_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2} - \frac{(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}-1\right) + \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}-1\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n = d_n$$

On a donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2(-1)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n}{4} & \frac{2(-1)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n}{4}a & \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)a^2 \\ \frac{(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n}{2a} & \frac{(-1)^{n} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)a \\ \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)}{a^2} & \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)}{a} & \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

Exercice B.12 : Calculer A^n avec A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J - I_4$$

J et I_4 commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (J - I_4)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (J)^k (-I_4)^{n-k}$$

On démontre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, J^k = 4^{k-1} J$$

On a donc :

$$(J - I_4)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (J)^k (-I_4)^{n-k} = (-1)^n I_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (J)^k (-I_4)^{n-k} = (-1)^n I_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(4^{k-1}(-1)^{n-k}\right) J$$

$$= (-1)^n I_n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1}(-1)^{n-k}\right) J = (-1)^n I_n + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1}(-1)^{n-k} - (-1)^n\right) J$$

$$= (-1)^n I_n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} J$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{4} & (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & 1 & (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} \end{pmatrix}$$

Partie C : Calcul de l'inverse par polynôme ou astuce

Exercice C.1 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$

b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

a) On calcule et on a :

$$A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$$

b) On a donc :

$$A\left(\frac{1}{2}(A^2 - 4a + 5I_3)\right) = I_3$$

On en déduit donc que $A \in \mathcal{G}\ell_3(\mathbb{R})$ et on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4a + 5I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ \frac{21}{2} & -3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice C.2 : On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 2A + 2I_2$.

b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

c) Retrouver ce résultat grâce à la formule.

a) On a :

$$A^2 - 2A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

b) On en déduit donc que :

$$A^2 - 3A = -2I_2 \Longrightarrow A\left(\frac{1}{2}(I_2 - 3A)\right) = I_2$$

On en déduit donc que A est inversible et que :

$$A^{-1} = -\frac{3}{2}A + \frac{1}{2}I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) On sait que :

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = -4 + 6 = 2 \neq 0$$

$$\Longrightarrow A \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice C.3 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $(A + I_3)^3$

2) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$

1) On sait que :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors par le calcul :

$$(A + I_3)^3 = 0_3$$

2) On sait que A et I_3 commutent donc :

$$(A+I_3)^3 = A^3+3A^2+3A+I_3 = 0_3$$
$$\Longrightarrow A(-A^2-3A-3I_3) = I_3$$

On en déduit donc que :

$$A \in GL_3(\mathbb{R}) \text{et } A^{-1} = -A^2-3A-3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice C.4 : Soit n un entier supérieur ou égale à 2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\le k,l\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1) Calculer $A\bar{A}$.

2) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

1) On pose :

$$A\bar{A} = \left(a_{p,q}\right)_{1\le p,q\le n}$$

On sait de plus que :

$$\forall (p,q) \in [\![1;n]\!]^2, a_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(p-1)(k-1)}\bar{\omega}^{(k-1)(q-1)}$$

Or on sait que :

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \Longrightarrow \omega^{(p-1)(k-1)}\bar{\omega}^{(k-1)(q-1)} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{(p-1)(k-1)}\left(e^{-\frac{2i\pi}{n}}\right)^{(q-1)(k-1)}$$
$$= e^{\frac{2i\pi}{n}(k-1)[(p-1)-(q-1)]}$$
$$= e^{\frac{2i\pi}{n}(k-1)(p-q)}$$
$$= \left(e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)}\right)^{k-1}$$
$$\forall (p,q) \in [\![1;n]\!]^2, a_{p,q} = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)}\right)^{k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)}\right)^{k}$$

Or on sait que :

$$\forall (n,q) \in \mathbb{N}\times(\mathbb{C}\backslash\{1\}), \sum_{k=0}^{n-1}(q)^k = \frac{q^n-1}{q-1}$$

De plus on sait que :

$$\forall (p,q) \in [\![1;n]\!]^2, -n < 1-n \le p-q \le n-1$$

1er cas : Si $p \neq q \Longrightarrow (p-q) \in [\![-n+1\,;n-1]\!]\backslash\{0\} \Longrightarrow e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)} \neq 1$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)}\right)^{k} = \frac{\left(e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)}\right)^{n}-1}{e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)}-1} = \frac{e^{2i\pi(p-q)}-1}{e^{\frac{2i\pi}{n}(p-q)}-1} = 0$$

2ième cas : Si $p = q$

$$\Longrightarrow a_{p,p} = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}(p-p)}\right)^{k-1} = n$$

On en déduit donc que :

$$A\bar{A} = nI_n$$

2) On a donc :

$$A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}), A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}$$

Partie D : Par un système linéaire ou Gauss-Jordan

Exercice D.1 : Déterminer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\ ;C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

1) On peut soit appliquer le pivot de Gauss, soit résoudre un système. Nous allons faire le pivot de Gauss avec la matrice A et résoudre un système avec la matrice B.

Opérations	$\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$L_1\longleftarrow\frac{1}{3}L_1$	$\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\1&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$L_2\longleftarrow L_2-L_1$ $L_3\longleftarrow L_3-2L_1$	$\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\0&-\frac{10}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}$
$L_2\longleftarrow-\frac{3}{5}L_2$	$\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{4}{5}\\0&-\frac{10}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&0\\-\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}$
$L_3\longleftarrow L_3+\frac{10}{3}L_2$	$\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$
$L_3\longleftarrow-L_3$	$\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$
Remarque :	La matrice échelonnée réduite de A à 3 pivots donc elle est inversible.	
$L_2\longleftarrow L_2+\frac{4}{5}L_3$ $L_1\longleftarrow L_1+\frac{1}{3}L_3$	$\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{5}&1&-\frac{4}{5}\\0&2&-1\end{pmatrix}$
$L_1\longleftarrow L_1-\frac{2}{3}L_2$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&1&-\frac{4}{5}\\0&2&-1\end{pmatrix}$

On en déduit donc que A est inversible, $A\in\mathcal{G}\ell_3(\mathbb{R})$ et :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&1&-\frac{4}{5}\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

b) On a :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = x' \\ z = y' \\ -y + z = z' \end{cases}$$

On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2z = x' \\ z = y' \\ -y + z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y' - x' \\ y = y' - z' \\ z = y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Donc B est inversible et :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier en calculant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Par la méthode de votre choix, je vous donne juste le résultat :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice D.2 : Déterminer si les matrices suivantes en discutant suivant le paramètre réel α puis calculer leur inverse.

a) $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$.

a) On a :

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) & \mathrm{sh}(\alpha) \\ \mathrm{sh}(\alpha) & \mathrm{ch}(\alpha) \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \mathrm{ch}^2(\alpha) - \mathrm{sh}^2(\alpha) = 1 \neq 0$$

On en déduit donc que $A \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$ et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) & -\mathrm{sh}(\alpha) \\ -\mathrm{sh}(\alpha) & \mathrm{ch}(\alpha) \end{pmatrix}$$

b) On pose :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

On voit déjà que si $\alpha = 1$, alors le rang de la matrice est 1, $\mathrm{rg}(B) = 1$ donc B n'est pas inversible.
A présent on étudie le cas : $\alpha \neq 1$
On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

Opérations	$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftrightarrow L_1$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$
$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ $L_3 \longleftarrow L_3 - \alpha L_1$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\alpha\end{pmatrix}$
$L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{\alpha - 1} L_2$ car $\alpha \neq 0$ $L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{1 - \alpha} L_3$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 + \alpha\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha - 1} & -\dfrac{1}{\alpha - 1} \\ \dfrac{1}{1 - \alpha} & 0 & -\dfrac{\alpha}{1 - \alpha}\end{pmatrix}$
$L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 + \alpha\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha - 1} & -\dfrac{1}{\alpha - 1} \\ \dfrac{1}{1 - \alpha} & \dfrac{1}{1 - \alpha} & 1\end{pmatrix}$
Remarque : Si $\alpha = -2$, alors la matrice B n'est pas inversible non plus car il y aurait deux pivots, $\mathrm{rg}(B) = 2$!!	Si $A = 2$, on a : $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ On a alors : $L_2 + L_3 = -L_1$ Donc $B \neq \mathcal{G}\ell_3(\mathbb{R})$	

On étudie à présent le cas :

$$\alpha \neq \{-2; 1\}$$

$L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{2 + \alpha} L_3, \alpha \neq -2$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha - 1} & -\dfrac{1}{\alpha - 1} \\ \dfrac{1}{(1 - \alpha)(2 + \alpha)} & \dfrac{1}{(1 - \alpha)(2 + \alpha)} & \dfrac{1}{(2 + \alpha)}\end{pmatrix}$
$L_2 \longleftarrow L_3 + L_2$ $L_1 \longleftarrow L_1 - \alpha L_3$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\dfrac{-\alpha}{(1 - \alpha)(2 + \alpha)} & \dfrac{-\alpha}{(1 - \alpha)(2 + \alpha)} & 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha + 2} \\ \dfrac{1}{(1 - \alpha)(2 + \alpha)} & \dfrac{1}{1 - \alpha}\left(\dfrac{1}{2 + \alpha} - 1\right) & \dfrac{1}{(2 + \alpha)} - \dfrac{1}{\alpha - 1} \\ \dfrac{1}{(1 - \alpha)(2 + \alpha)} & \dfrac{1}{(1 - \alpha)(2 + \alpha)} & \dfrac{1}{(2 + \alpha)}\end{pmatrix}$ $= (1 - \alpha)(2 + \alpha)\begin{pmatrix}-\alpha & -\alpha & 2(1 - \alpha) \\ 1 & -1 - \alpha & 3 \\ 1 & 1 & 1 - \alpha\end{pmatrix}$
$L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$(1 - \alpha)(2 + \alpha)\begin{pmatrix}-1 - \alpha & 1 & -1 - 2\alpha \\ 1 & -1 - \alpha & 3 \\ 1 & 1 & 1 - \alpha\end{pmatrix}$

On en déduit donc que :

$$B = \begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} \in \mathcal{G}\ell(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha \notin \{-2; 1\} \text{et alors } B^{-1} = (1 - \alpha)(2 + \alpha)\begin{pmatrix}-1 - \alpha & 1 & -1 - 2\alpha \\ 1 & -1 - \alpha & 3 \\ 1 & 1 & 1 - \alpha\end{pmatrix}$$

Exercice D.3 : On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
b) Montrer que : $D = P^{-1}AP$ est diagonale, puis calculer D^n
c) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.
d) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} (u_0, v_0, w_0) = (3,1,5) \\ u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - 2w_n \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite des suites u, v et w.

a) On peut le faire par le pivot de Gauss ou la résolution d'un système. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) C'est un simple calcul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme D est diagonale on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

c) **Méthode 1 : Par récurrence**

On pose :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{P_n} : \text{"}A^n = PD^nP^{-1}\text{"}$$

Initialisation : $\mathbf{n = 0, A^0 = I_3}$ et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n. On a :

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} \Longrightarrow A^{n+1} &= PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc P_n est héréditaire.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{A^n} = PD^nP^{-1}$$

Méthode 2 : Par itération

On a :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \dots \times PDP^{-1} = PD \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} DP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD \times \dots \times DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

d) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} (u_0, v_0, w_0) = (3,1,5) \\ u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - 2w_n \end{cases}$$

On sait que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - 2w_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 + 6 \times (-1)^n \\ 6 \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice D.4 (Matrice à diagonale dominante) : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in [\![1,n]\!]}} |a_{i,j}| \Longrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$$

On raisonne par l'absurde. On suppose que A n'est pas inversible. On sait que :

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \notin GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \text{tel que :}$$

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0$$

On pose :

$$x_{i_0} = \underbrace{\sup}_{i \in [\![1;n]\!]} \{|x_i|\} > 0$$

On a alors :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0 \Longrightarrow a_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i,j} x_j$$

On a donc :

$$|a_{i_0,i_0} x_{i_0}| = |x_{i_0}||a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j} x_j| \le |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$$

Comme $|x_{i_0}| \neq 0$ on a :

$$|a_{i_0,i_0}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i,j}|$$

Cela est impossible.
On en déduit donc que $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice D.5 : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
b) Calculer $P^{-1}AP$. En déduire alors A^n pour tout n entier naturel.
c) On pose les suites (u_n) et (v_n) définie par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{cases}$$

Donner la formule explicite de u_n et v_n en fonction de n.
d) On considère les équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases}$$

Résoudre de deux manières différentes cette équation différentielle.

a) On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(P) = 2 \times 1 - 1 \times 1 \neq 0 \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors comme dans l'exercice D.3 que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3^n & 3^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-3^n & -1+3^n \\ 2-2\times 3^n & -1+2\times 3^n \end{pmatrix}$$

c) On a comme dans l'exercice D.3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-3^n & -1+3^n \\ 2-2\times 3^n & -1+2\times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = (2-3^n)u_0 + (-1+3^n)v_0 \\ v_n = (2-2\times 3^n)u_0 + (-1+2\times 3^n)v_0 \end{cases}$$

d) On a :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases}$$

Méthode 1 : Avec des dérivées secondes !

$$x' = -x + 2y \Longrightarrow x'' = -x' + 2y' \Longrightarrow x'' + x' = -8x + 10y = -8x + 5(x' + x)$$
$$\Longrightarrow x'' - 4x' + 3x = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$(E_q)\colon r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow r \in \{1; 3\}$

On en déduit donc que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = Ae^t + Be^{3t}$$

On peut faire de même avec y ou bien résoudre :

$$y' - 5y = -4(Ae^t + Be^{3t})$$

On sait que :

$$y' - 5y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{5t}$$

De plus on cherche une solution particulière. On pose :

$$y_p(t) = Ae^t + 2Be^{3t}$$

On a alors :

$$y_p' - 5y_p = -4(Ae^t + Be^{3t})$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases} \Longrightarrow \exists (A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{3t} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{5t} + Ae^t + 2Be^{3t} \end{cases}$$

Cependant on a trois degrés de liberté ce qui n'est pas possible.

On sait que :

$$x'(0) = -x(0) + 2y(0) = -A - B + 2\lambda + 2A + 4B = A + 3B$$
$$\Longrightarrow 2\lambda = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda = 0$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases} \Longrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{3t} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(t) = Ae^t + 2Be^{3t} \end{cases}$$

Il reste à vérifier car nous n'avons pas travaillé par équivalence !!

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{3t} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(t) = Ae^t + 2Be^{3t} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = Ae^t + 3Be^{3t} = -Ae^t - Be^{3t} + 2(Ae^t + 2Be^{3t}) = -x(t) + 2y(t) \\ y' = Ae^t + 6Be^{3t} = -4(Ae^t + Be^{3t}) + 5(Ae^t + 2Be^{3t}) = -4x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{3t} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(t) = Ae^t + 2Be^{3t} \end{cases}$$

Méthode 2 : Avec des matrices !

On a :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = DP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) - y(t) \\ -x(t) + y(t) \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) - y(t) \\ -x(t) + y(t) \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ y'_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ y_1'(t) = 3y_1(t) \end{cases} \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x_1(t) = Ae^t \\ y_1(t) = Be^{3t} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^t + Be^{3t} \\ Ae^t + 2Be^{3t} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = Ae^t + Be^{3t} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(t) = Ae^t + 2Be^{3t} \end{cases}$$

Partie E: Matrices symétriques

Exercice E.1 : Soient $(n,p,m) \in (\mathbb{N}^*)^3, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), (B,C) \in \left(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\right)^2$

1) Montrer que :

$$AA^T = 0_n \Longrightarrow A = 0_{n,p}$$

2) Montre que :

$$BAA^T = 0_{m,n} \Longrightarrow BA = 0_{m,p}$$

3) Montrer que :

$$BAA^T = CAA^T \Longrightarrow BA = CA$$

1) On pose :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

On a alors :

$$AA^T = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$$

Avec :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, b_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} a_{j,k}$$

On a donc :

$$AA^T = 0_n \Longrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], b_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} a_{i,k} = 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}^2 = 0$$

Or on sait que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{i,k} = 0 \Leftrightarrow A = 0_{n,p}$$

2) On sait que $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ donc le produit $A^T \times B^T$ existe. On a donc :

$$BAA^T = 0_{m,n} \Longrightarrow BAA^TB^T = 0_n \Longrightarrow (BA) \times (BA)^T = 0_n$$

$$\Longrightarrow BA = 0_{m,p} \text{ d'après la question précédente.}$$

3) On a :

$$BAA^T = CAA^T \Leftrightarrow BAA^T - CAA^T = 0_{m,n} \Leftrightarrow (B-C)AA^T = 0_{m,n} \Leftrightarrow B - C = 0_{m,p} \Leftrightarrow B = C$$

Exercice E.2 : Calculer si cela est possible l'inverse de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut bien sûr le faire de façon classique, soit avec un système, soit avec le pivot de Gauss. Ici nous allons présenter une façon plus original, en utilisant un polynôme en A.

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J - I_4$$

J et I_4 commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (J - I_4)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (J)^k (-I_4)^{n-k}$$

On démontre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, J^k = 4^{k-1} J$$

On a donc :

$$(J - I_4)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (J)^k (-I_4)^{n-k} = (-1)^n I_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (J)^k (-I_4)^{n-k} = (-1)^n I_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(4^{k-1} (-1)^{n-k}\right) J$$

$$= (-1)^n I_4 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I_4 + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} (-1)^{n-k} - (-1)^n \right) J$$

$$= (-1)^n I_4 + \frac{3^n - (-1)^n}{4} J$$

On pose :

$$\alpha_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

On a alors :

$$A^n - \alpha_n J = (-1)^n I_4$$

Or on sait que :

$$J = A + I_4$$

On a donc :

$$A^n - \alpha_n J = (-1)^n I_4 \Longrightarrow$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{4} & (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{4} & \frac{3^n - (-1)^n}{4} & 1 & (-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice E.3 : On veut montrer que $A \in A_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow (I_n + A) \in GL_n(\mathbb{R})$
1) Soit X un vecteur colonne. Montrer que $X^T X \in [0; +\infty[$
2) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_n + A)X = 0_{n,1} \Longrightarrow X = 0_{n,1}$
3) En déduire que $(I_n + A) \in GL_n(\mathbb{R})$
4) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. On pose $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Montrer que $M^{-1} = M^T$

1) On pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

On a alors :

$$X^T X = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \geq 0$$

On en déduit donc que : $X^T X \in [0; +\infty[$.
On remarque même que

$$X^T X = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1; n]\!], x_k = 0$$

2) On a :

$$(I_n + A)X = 0_{n,1}$$
$$\Longrightarrow [(I_n + A)X]^T \times (I_n + A)X = 0$$
$$\Longrightarrow X^T (I_n + A)^T (I_n + A)X = 0$$

Or on a :

$$(I_n + A)^T = I_n - A$$

On a donc :

$$(I_n + A)X = 0_{n,1} \Longrightarrow X^T (I_n - A)(I_n + A)X = 0 \Longrightarrow X^T (I_n - A^2)X = 0 \Longrightarrow X^T X - X^T A^2 X = 0$$

Or on sait que :

$$-A^2 = A^T \times A \ car \ A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On en déduit donc que :

$$X^T X - X^T A^2 X = 0 \Longrightarrow X^T X + X^T A^T A X = 0 \Longrightarrow X^T X + (AX)^T (AX) = 0$$

Or on sait que :

$$(I_n + A)X = 0_{n,1} \Longrightarrow X + AX = 0_{n,1} \Longrightarrow X = -AX$$

On a donc :

$$\boldsymbol{(I_n + A)X = 0_{n,1} \Longrightarrow X^T X + (AX)^T (AX) = 0 \Longrightarrow X^T X + (-X)^T (-X) = 0 \Longrightarrow 2X^T X = 0 \Longrightarrow X = 0_{n,1}}$$

D'après la question précédente.
3) C'est une **caractérisation des matrices inversibles**. On sait que :

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{n,1}\}, AX \neq 0_{n,1}$$

C'est donc immédiat !
4) On pose :

$$M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

On a alors :

$$M(I_n + A) = I_n - A \Longrightarrow [M(I_n + A)]^T = (I_n - A)^T \Longrightarrow (I_n + A)^T M^T = I_n + A \Longrightarrow (I_n - A)M^T = I_n + A$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{M^T = (I_n + A)(I_n - A)^{-1} = M^{-1}}$$