Fiches d'exercices 14 : Continuité

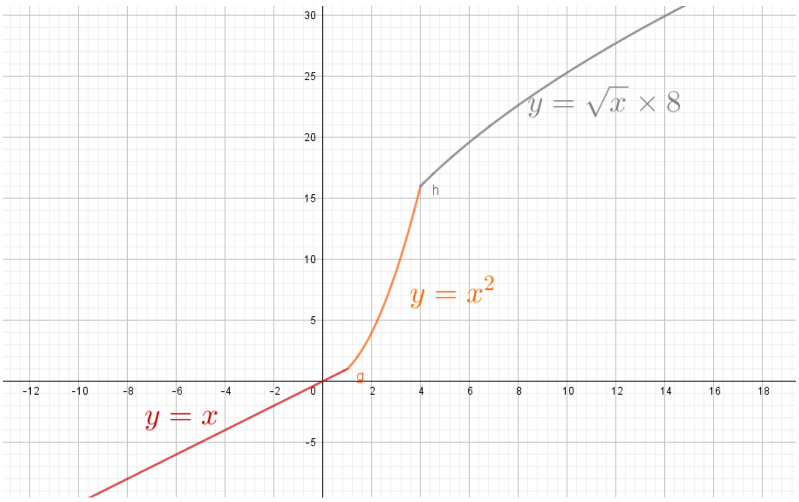
Partie A : Continuité locale

Exercice A.1 : Soit f la fonction à valeurs réelles définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \; si \; x < 1 \\ x^2 si \; 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} \; si \; x > 4 \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f.
2) f est-elle continue sur ℝ

1)



2) Il suffit de voir que f est continue sur chaque intervalle $]-\infty; 1[$, $[1; 4]$ et $]4; +\infty[$. De plus on a :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$$

Donc *f* est continue sur ℝ.

Exercice A.2 :
Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 pour f et en 1 pour g ?

$$f(x) = sin(x) \, sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad b) \; g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

1) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |sin(x)| \leq |x|$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|sin(x) \, sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

On a donc :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant :

$$\tilde{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} sin(x) \, sin\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

2) On a :

$$\forall x > -1, g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\left(1 - \frac{2}{1+x}\right) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = -\frac{1}{1+x}$$

On a donc :

$$\lim_{x\to 1} g(x) = -\frac{1}{2}$$

On peut donc prolonger par continuité en 1 en posant :

$$\tilde{g}: \begin{cases}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} \; si \; x \neq 1 \\ -\dfrac{1}{2} \; si \; x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice A.3 : On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On cherche à montrer que g est continue.

1) Ecrire la condition nécessaire et suffisante pour que g soit continue.

2) Démontrer que :

$$\forall\, x \in [-1;1], 1 + x + x^2 \geq e^x \geq 1 + x$$

3) En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

1) On souhaite que :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

2) On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - 1 - x$$

On sait que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

On fait de même en posant $h: x \mapsto e^x - 1 - x - x^2$

On sait que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x - 1 - 2x$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = e^x - 2$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		$ln(2)$		1
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$	$\frac{1}{e}+1$	$\searrow$	$1-ln(4)$	$\nearrow$	$e-3$

Or on sait que $e - 3 < 0$

De plus h' est continue sur $[-1;\ln(2)]$, strictement décroissante et change de signe. Il existe donc un unique $\alpha \in [-1;\ln(2)]$ tel que $h'(\alpha) = 0$, d'après le théorème de la bijection.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		α		$ln(2)$		1
$h''(x)$		$-$			0	$+$	
$h'(x)$	$\frac{1}{e}+1$	$\searrow$			$1-ln(4)$	$\nearrow$	$e-3$
$h'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
h		$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$		$\searrow$	

Or on sait que :

$$h'(\alpha) = e^{\alpha} - 1 - 2\alpha = 0$$

On a donc :

$$h(\alpha) = e^{\alpha} - 1 - \alpha - \alpha^2 = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1 - \alpha)$$

De plus on a : $h'(0) = e^0 - 1 = 0$. On en déduit donc que $\alpha = 0$.
On a donc :

$$\forall\, x \in [-1; 1], 1 + x + x^2 \geq e^x \geq 1 + x$$

3) On en déduit donc que :

$$\forall\, x \in [-1; 1], -x \in [-1; 1] \Longrightarrow\; 1 - x + x^2 \geq e^{-x} \geq 1 - x$$

$$\Longrightarrow \forall\, x \in [-1; 1], x \geq 1 - e^{-x} \geq x - x^2$$

$$\Longrightarrow \forall\, x \in [-1; 1], x \neq 0, \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{x - x^2}\ car\ x \mapsto \frac{1}{x}\ est\ décroissante\ sur\ \mathbb{R}^{*-}\ et\ \mathbb{R}^{*+}$$

$$\Longrightarrow \forall\, x \in [-1; 1], x \neq 0, \frac{x^2 e^{-x}}{x} \leq \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{x^2 e^{-x}}{x - x^2}$$

$$\Longrightarrow \forall\, x \in [-1; 1], x \neq 0, xe^{-x} \leq g(x) \leq \frac{xe^{-x}}{1 - x}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{-x}}{1 - x} = \lim_{x \to 0} xe^{-x} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Donc g est continue sur en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice A.4 : On pose :

$$g : \begin{cases}]0; 1[\cup]1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\, ln(x)} \end{cases}$$

a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 1.
b) g est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

a) On veut montrer que :

$$\lim_{x \to 1} g(x)\ \text{ existe!}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{xln(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)}{x} \times \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{ln(x)} = 3 \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{ln(x)}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{ln(x) - ln(1)}{x - 1} = ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Ainsi on a :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ln(x)} = 1\ (par\ quotient)$$

On a donc :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{xln(x)} = 3$$

Donc g est prolongeable par continuité en 1 en posant :

$$\tilde{g}:\begin{cases}]0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x\,ln(x)}\ si\ x>1 \\ 3\ si\ x=1\end{cases}\end{cases}$$

b) On a :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)(x-1) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} xln(x) = 0^-\ (croissance\ comparée)\end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

Ainsi g n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Partie B : Continuité globale

Exercice B.1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$(E_n): x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k = 1$$

1) Montrer que (E_n) admet une unique solution sur [0 ;+∞[.

2) Soit x_n cette unique solution. Montrer que (x_n) converge puis calculer sa limite.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose la fonction :

$$f_n:\begin{cases} [0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x+x^2+\cdots+x^n\end{cases}$$

$f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} > 0\ car\ x \geq 0$$

On en déduit donc que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
f_n	0 ↗	$+\infty$

On a donc f_n est :

_ continue sur $\mathbb{R}^+$

_ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

_ $f_n(0) = 0$ et $f_n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 1$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x_n) = x_n + x_n^2 + \cdots + (x_n)^n + (x_n)^{n+1} = 1 + (x_n)^{n+1} > 1$$

On en déduit donc que :

$$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$$

Comme la fonction f_{n+1} est croissante on en déduit donc que : $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1}) \Longrightarrow x_n > x_{n+1}$

Donc la suite (x_n) est décroissante.

De plus (x_n) est minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell, \ell \geq 0$.

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, f_n(1) = n > 1$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, f_n(x_n) < f_n(1)$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, x_n < 1 \text{ car } f_n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, x_n + \cdots + (x_n)^n = 1$$
$$\Longrightarrow x_n = 1 - (x_n)^2(1 + x_n + \cdots + (x_n)^{n-2})$$
$$= 1 - (x_n)^2 \times \frac{1-(x_n)^{n-1}}{1-x_n}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, x_n = 1 - (x_n)^2 \times \frac{1-(x_n)^{n-1}}{1-x_n}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \geq 2, 0 < x_n \leq x_2 < 1$$
$$\Longrightarrow \forall n \geq 2, 0 < (x_n)^{n-1} \leq (x_2)^{n-1} < 1$$

Or on sait que :

$$\lim_n (x_2)^{n-1} = 0 \; car \; x_2 < 1$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n (x_n)^{n-1} = 0$$

On a donc par passage à la limite :

$$x_n = 1 - (x_n)^2 \times \frac{1-(x_n)^{n-1}}{1-x_n}$$
$$\Longrightarrow \ell = 1 - \ell^2 \times \frac{1}{1-\ell}$$
$$\Longrightarrow \ell - \ell^2 = 1 - \ell - \ell^2$$
$$\Longrightarrow \ell = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n x_n = \frac{1}{2}$$

Exercice B.2 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \in I, f(x)^2 = 1$$

Déterminer toutes les fonctions f possibles.

Et si $\ell = 1, f_n(1) = n > 0$ ce qui est impossible.
On sait que :

$$\forall x \in I, f(x)^2 = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) = \begin{cases} 1 \\ ou \\ -1 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe deux intervalles I' et J' inclus dans I disjoints telle que :

$$\forall x \in I', f(x) = 1$$
$$\forall x \in J, f(x) = -1$$

Comme f est continue sur i on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$ et donc $f(c)^2 = 0$ ce qui est absurde.

On en déduit donc que :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \in I, f(x)^2 = 1 \Leftrightarrow f = 1_I \text{ ou } f = -1_I$$

Avec 1_I qui désigne l'indicatrice de I.

Exercice B.3 : Une personne parcourt 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30mn où il a parcouru exactement 2km.

On pose f : $\begin{cases} [0;60] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) = \text{distance parcourue en km par la personne au bout de t minutes} \end{cases}$

On pose alors :

$$g : \begin{cases} [0;30] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t+30) - f(t) \end{cases}$$

On sait que :

$$\forall t \in [0;30], g(30) + g(0) = f(60) = 4$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} g(30) \geq 2 \text{ et } g(0) \leq 2 \\ \text{ou} \\ g(30) \leq 2 \text{ et } g(0) \geq 2 \end{cases}$$

Comme g est continue, il existe $t \in [0;30]$ tel que $g(t) = 2$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice B.4 : Soient f et g deux fonctions de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$M(x) = \sup_{t\in[-1;1]} \big(f(t) + xg(t)\big)$$

a) Expliciter $M(x)$ lorsque $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ et $g(t) = t$.
b) Montrer que $M: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
c) Montrer que :

$$\forall\, h > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} M(x+h) \leq M(x) + h \times \sup\limits_{t\in[-1;1]} g \\ M(x+h) \geq M(x) + h \times \inf\limits_{t\in[-1;1]} g \end{cases}$$

d) En déduire que $M: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

a) On a :

$$M(x) = \sup_{t\in[-1;1]} \big(f(t) + xg(t)\big) = \sup_{t\in[-1;1]} \left(\sqrt{1-t^2} + xt\right)$$

On pose :

$$h_x : \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{1-t^2} + xt \end{cases}$$

On a alors :

$$h_x \in \mathcal{D}(]-1;1[) \text{ et : } \forall t \in]-1;1[, h_x'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + x$$

On résout :

$$-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + x = 0 \Longrightarrow x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \Longrightarrow x\sqrt{1-t^2} = t \Longrightarrow x^2(1-t^2) = t^2 \Longrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = t^2 \Longrightarrow |t| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

De plus on a :

$$h_x'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + x$$

$h_x{}'$ a les mêmes variations que

$$h_0' : t \mapsto -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Il suffit alors de voir que :

$$h_0''(t) = -\frac{\sqrt{1-t^2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} < 0 \; sur \;]-1;1[$$

On en déduit donc que :
$h_x'(t) = 0$ admet au plus une valeur sur $]-1;1[$, appelé t_0.
On sait de plus que :

$$h_x'(0) = x$$

On en déduit donc que :
Si $x < 0$ alors :

$$h_x'(0) = x < 0 \Rightarrow t_0 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 0$$

De même si $x > 0$ alors :

$$h'_x(0) = x > 0 \Rightarrow t_0 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

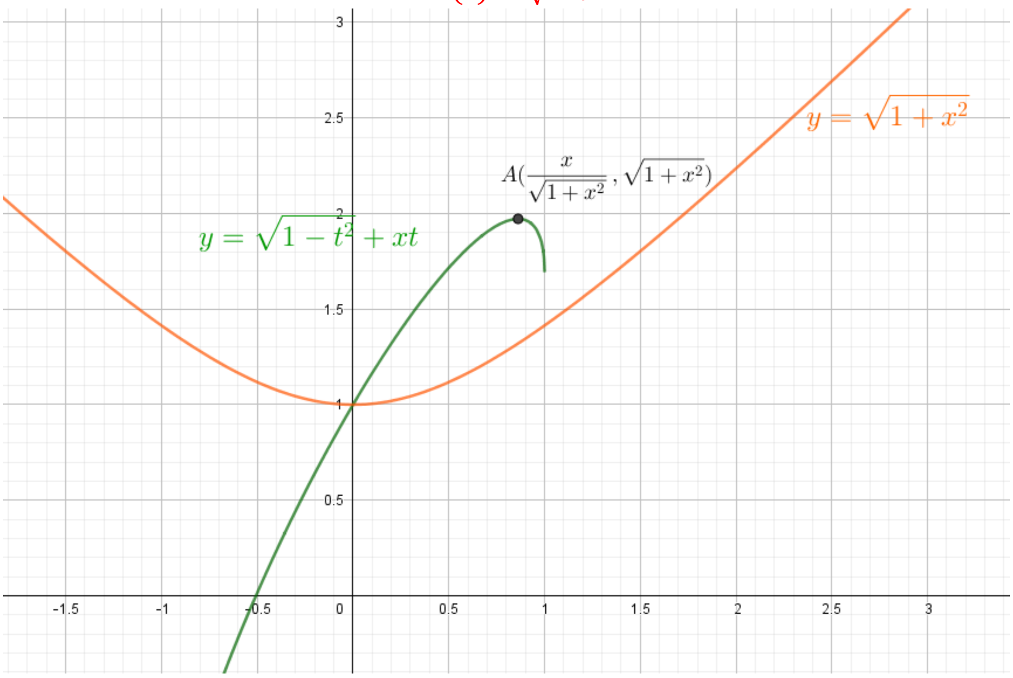
On a donc le tableau de variations suivant :

t	-1		$\frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{1+x2}}$		1
$h_0''(t)$			$-$		
h_0'	↘		0	↘	
$h_x'(t)$		$+$	0	$-$	
h_x	↗		$h_x(\frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{1+x2}})$	↘	

On a donc :

$$M(x) = \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t) + xg(t)\big) = h_x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} + x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Longrightarrow M(x) = \sqrt{1+x^2}$$



b) On a :

$$M(x) = \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t) + xg(t)\big)$$

Or on sait que $(f, g) \in \big(\mathcal{C}([-1;1])\big)^2$, on en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_x : t \mapsto f(t) + xg(t) \in \mathcal{C}([-1;1])$$

Or toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Donc il existe $t_0 \in [-1;1]$ tel que :

$$M(x) = h_x(t_0)$$

Donc M est bien définie.
c) On sait que :

$$\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall h>0, M(x+h) &= \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t)+(x+h)g(t)\big)\\ &= \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t)+xg(t)+hg(t)\big)\\ &\leq \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t)+xg(t)\big)+\sup_{t\in[-1;1]}\big(hg(t)\big)\\ &\leq M(x)+h\times\sup_{t\in[-1;1]} g\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}M(x+h) &= \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t)+(x+h)g(t)\big)\\ &= \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t)+xg(t)+hg(t)\big)\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall t\in[-1;1], f(t)+xg(t)+hg(t)\geq f(t)+xg(t)+h\inf_{t\in[-1;1]} g$$

On a donc :

$$\begin{aligned}M(x+h) &= \sup_{t\in[-1;1]}\big(f(t)+xg(t)+hg(t)\big)\\ &\leq \sup_{t\in[-1;1]}\left(f(t)+xg(t)+h\inf_{t\in[-1;1]} g\right)\\ &\leq M(x)+h\times\inf_{t\in[-1;1]} g\end{aligned}$$

d) M est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\lim_{h\to 0} M(x+h)=M(x)$$

Or on sait :

$$\forall\, h>0, \forall\, x\in\mathbb{R}, M(x)+h\times\inf_{t\in[-1;1]} g\leq M(x+h)\leq M(x)+h\times\sup_{t\in[-1;1]} g$$

Comme g est continue sur $[-1;1]$, g est bornée et atteint ses bornes. Donc il existe $(t_0,t_1)\in([-1;1])^2$ tel que :

$$\inf_{t\in[-1;1]} g=g(t_0)=m$$
$$\sup_{t\in[-1;1]} g=g(t_1)=M$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, h>0, \forall\, x\in\mathbb{R}, M(x)+h\times m\leq M(x+h)\leq M(x)+h\times M$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{h\to 0^+} M(x+h)=M(x)$$

On peut raisonner de même et démontrer que :

$$\lim_{h\to 0^-} M(x+h)=M(x)$$

On en déduit donc que M est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice B.5 : Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x\in\mathbb{Q}, f(x)=g(x)$$

Montrer que f = g

Il suffit d'utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire que :
$\forall x\in\mathbb{R}, \exists (x_n)\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_n x_n=x$$

Autrement dit tout nombre irrationnel est limite d'une suite de rationnels. Il suffit de prendre par exemple la suite des décimale de x.
Comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, f(x_n)-g(x_n)=0\Longrightarrow \lim_n f(x_n)-g(x_n)=0=f(x)-g(x)$$

On en déduit que $f=g$.

Exercice B.6 : On pose :

$$f:\begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

1) Montrer que f est bijective.
2) Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})$$

1) Il suffit de voir que f est dérivable sur son ensemble de définition et que :

$$\forall x\in]0;1[, f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}<0$$

Donc f est continue et strictement monotone sur]0; 1[, elle est donc bijective d'après le théorème de la bijection.
De plus on peut voir que :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$$

Donc f réalise une bijection de]0; 1[dans $\mathbb{R}$.
2) On sait que f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})=f^{-1}(0)$$

Il suffit alors de résoudre l'équation :

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})=\frac{1}{2}$$

Exercice B.7 : Soient $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $f\in\mathcal{C}^0([a;b];\mathbb{R})$ tel que :

$$f([a;b])\subset[a;b]$$

Montrer que :

$$\exists\, c\in[a;b], f(c)=c$$

Il suffit de poser :

$$g:x\mapsto f(x)-x$$

On a :
$g(a)=f(a)-a\geq0$ car $f(a)\in[a;b]$ donc $f(a)\geq a$
De même on a :

$$g(b)=f(b)-b\leq0 \text{ car } f(b)\in[a;b]$$

On a donc :

- $g\in\mathcal{C}([a;b])$
- $g(a)\leq0$
- $g(b)\geq0$

Donc d'après le TVI, il existe une valeur $c\in[a;b]$ tel que $g(c)=0$
Donc :

$$\exists\, c\in[a;b], f(c)=c$$

Exercice B.8 : Soit $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0)=f(1)$. Montrer que :

$$\exists(x_1;x_2)\in[0;1]^2,\begin{cases} f(x_1)=f(x_2) \\ x_2-x_1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On pose :

$$g:\begin{cases}\left[0;\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f(x)\end{cases}$$

On a :

$$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$

On a donc :

$$g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} g(0) \geq 0 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \\ \text{ou} \\ g(0) \leq 0 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

Donc :

- g change de signe sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ (ou g est toujours nul !)
- g est continue

Donc il existe $c \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$

On a alors :

$$f\left(c+\frac{1}{2}\right) = f(c)$$

On pose :

$$x_1 = c + \frac{1}{2}, x_2 = c$$

On a alors :

$$\begin{cases} f(x_1) = f(x_2) \\ x_2 - x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice B.9 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective. On se propose de montrer que f est strictement monotone.

Partie A : Première méthode :

On considère $(a, b, x, y) \in I^4$ avec $a < b$ et $x < y$. On pose :

$$\forall t \in [0;1], u(t) = tx + (1-t)a$$
$$\forall t \in [0;1], v(t) = ty + (1-t)b$$
$$\forall t \in [0;1], G(t) = f\big(u(t)\big) - f\big(v(t)\big)$$

1) Calculer $u(0), u(1), v(0)$ et $v(1)$.

2) Tracer u et v.

3) Montrer que :

$$\forall t \in [0;1], u(t) < v(t)$$

4) En déduire que G ne s'annule pas sur $[0;1]$ puis que $G(0)$ et $G(1)$ ont même signe.

5) En déduire que f est monotone sur I.

Partie B : Deuxième méthode : On suppose que f n'est pas monotone.

1) Expliquer pourquoi on peut supposer :

$$\exists a < b < c \text{ tels que } f(a) < f(b) < f(c)$$

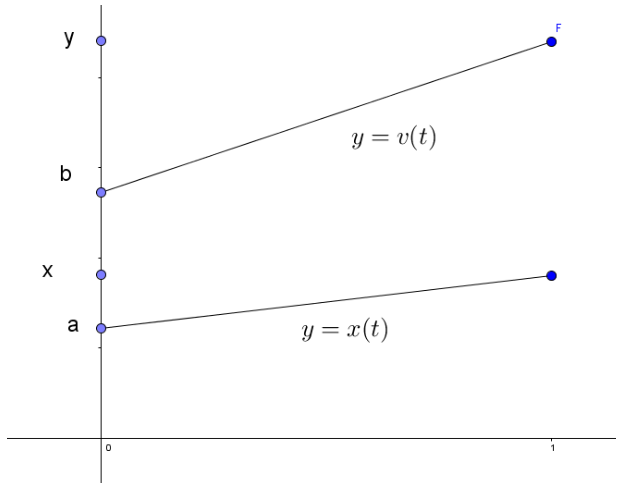
2) Faire un dessin.

3) Conclure.

Partie A : Première méthode :

1) $u(0) = a, u(1) = x, v(0) = b$ et $v(1) = y$

2)



3) On a :

$$\forall t \in]0;1[, a < b \Longrightarrow tx < ty \text{ et } \underbrace{(1-t)}_{>0} a < (1-t)b$$

Par addition :

$$\forall t \in]0;1[, tx + (1-t)a < ty + (1-t)b$$

Si $t = 0, tx + (1-t)a = a < b = ty + (1-t)b$

Si $t = 1, tx + (1-t)a = x < y = ty + (1-t)b$

On a donc :

$$\forall t \in [0;1], u(t) < v(t)$$

4) On a vu grâce à la question précédente que :

$\forall t \in [0;1], u(t) < v(t) \Longrightarrow u(t) \neq v(t) \Longrightarrow f\big(u(t)\big) \neq f\big(v(t)\big)$ car f est injective.

On a donc :

$$\forall t \in [0;1], G(t) = f\big(u(t)\big) - f\big(v(t)\big) \neq 0$$

Donc G ne s'annule pas sur $[0;1]$.

Or f est continue (énoncé) de même que u et v (fonctions affines). Donc par composition G est aussi continue et comme G ne s'annule pas, d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que G est toujours de même signe. Donc $G(0)$ et $G(1)$ sont de même signe.

5) On a d'après la question précédente :

$\forall (a;b) \in I^2, a < b, \forall (x,y) \in [a;b]^2, x < y$ le signe de $f(a) - f(b) = G(0)$ est le même que le signe de $G(1) = f(x) - f(y)$. Donc la fonction f est monotone.

Partie B : Deuxième méthode : On suppose que f n'est pas monotone.

1) On suppose ici que f n'est pas monotone. Donc elle n'est ni croissante ni décroissante sur I.

On cherche donc la négation de :

$$\begin{cases} \forall (a,b) \in I^2, a < b \Longrightarrow f(a) < f(b) \\ \text{ou} \\ \forall (a,b) \in I^2, a < b \Longrightarrow f(a) > f(b) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\text{NON}\left(\begin{cases} \forall (a,b) \in I^2, a < b \Longrightarrow f(a) < f(b) \\ \text{ou} \\ \forall (a,b) \in I^2, a < b \Longrightarrow f(a) > f(b) \end{cases}\right) = \begin{cases} \exists a < b < c \text{ tels que } f(a) < f(b) \text{ et } f(b) > f(c) \\ \text{ou} \\ \exists a < b < c \text{ tels que } f(a) > f(b) \text{ et } f(b) < f(c) \end{cases}$$

On peut supposer le premier, ce qui ne change rien à la démonstration.

3) On pose :

$$M = \max\left(\frac{f(a) + f(b)}{2}, \frac{f(c) + f(b)}{2}\right)$$

On sait que :

$$f(a) < M < f(b) \text{ et } f(c) < M < f(b)$$

Donc en appliquant le TVI sur l'intervalle $[a,b]$ puis sur l'intervalle $[b,c]$, on obtient $(x_1, x_2) \in]a,b[\cap]b,c[$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc f n'est pas injective.

Donc f doit être monotone pour être injective.

Exercice B.10 : Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ continue vérifiant $f(0) = 0; f(1) = 1, \forall x \in [0;1], fof(x) = x$. Déterminer f.

On sait que $f(f(x)) = x$. Donc f est bijective et $f^{-1}: x \mapsto x$
Comme f est continue, f est monotone.
Or $f(0) = 0 < f(1) = 1$ on en déduit donc que f est croissante.
Donc $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$.
Soit $y \in [0;1]$. On pose la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = y \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme f est croissante, (u_n) est monotone.
Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = u_n$$

On en déduit donc que (u_n) est stationnaire car monotone.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_1 = y = f(u_0) = f(y)$$

Donc la seule fonction qui convienne est $f: x \mapsto x$

Exercice B.11 : Soient $f, g : [0;1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0;1], f(x) < g(x)$. Montrer que :

$$\exists m > 0;\ \forall x \in [0;1], f(x) + m \leq g(x)$$

On l'a fait dans le cours. On pose : $h: x \mapsto g(x) - f(x)$
On a :

$$\forall x \in [0;1], h(x) > 0$$

De plus h est continue sur un segment donc elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists x_0 \in [0;1], \forall x \in [0;1], h(x) \geq h(x_0)$$

On pose $m = h(x_0)$
On a bien :

$$\exists m > 0;\ \forall x \in [0;1], f(x) + m \leq g(x)$$

Remarque : Cela n'est plus vrai si l'on se place sur un segment.
Contre-exemple :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2} \end{cases}$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - f(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

Cependant :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - f(x)\big) = 0$$

Partie C : Equations fonctionnelles

Exercice C.1 : Déterminer toutes les fonctions continues sur l'intervalle considéré vérifiant les relations fonctionnelles suivantes :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = f(x)$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$ $\left(\text{On poura prendre } \left(x^{2^n}\right) \text{ et } \left(x^{2^{-n}}\right)\right)$
d) $\forall x \in [0;1], f(x^2) \leq f(x)$ et $f(0) = f(1)$ $\left(\text{On poura prendre } \left(x^{2^n}\right) \text{ et } \left(x^{2^{-n}}\right)\right)$
e) $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$ $\left(\text{Etudier la suite définie par } u_0 = x \text{ et } u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}\right)$

Pour ce genre d'exercice il faut utiliser les suites et la définie séquentielle de la limite !

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x$$

On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1;1[$$

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n}{2}\right) = f(u_n) = f(x)$$

Donc $f(u_n)$ est stationnaire.

Or on sait que f est continue en 0 donc :

$$\lim_n f(u_n) = f(0) = f(x)$$

On en déduit donc que f est constante.

b)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ -1 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe J et J′ deux intervalles distincts inclus dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in J, f(x) = 1$$
$$\forall x \in J', f(x) = -1$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le TVI, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Absurde car $f(c)^2 = 1$

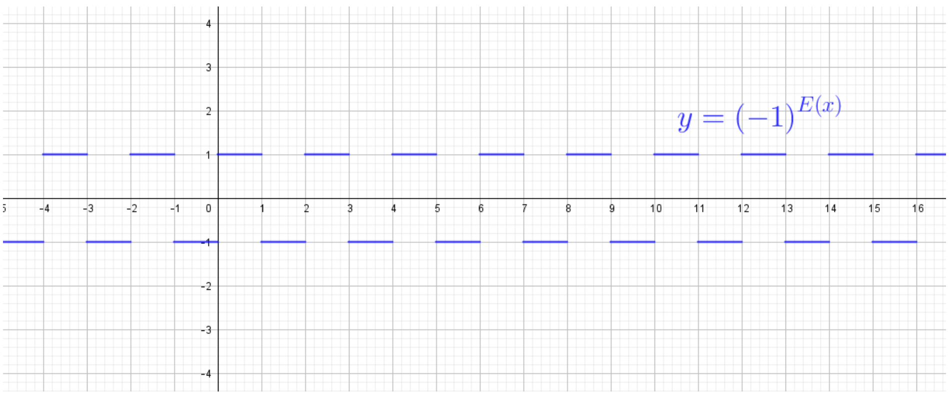
On a donc :

$$f = 1 \text{ ou } f = -1$$

Il n'existe alors que deux fonctions qui vérifie cette relation fonctionnelle tout en étant continue.

Remarque : Si f n'est pas continue il existe une infinité de fonctions vérifient cette relation.

Exemple :



c) On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$$

On suit l'indication.

- **1er cas : Soit $x \in]-1;1[$.**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x^{2^n}$$

On a alors :

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = x^{2^{n+1}} = x^{2^n \times 2} = \left(x^{2^n}\right)^2 = u_n^2$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_{n+1}) = f(u_n) = f(u_0) = f(x)$$

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n} 2^n = +\infty \\ \lim\limits_{N\to+\infty} x^N = 0 \text{ car } x \in [0;1[\end{cases}$$

Par continuité de f en 0 on en déduit que :

$$\lim_{n} f(u_n) = f(0) = f(x)$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]-1;1[, f(x) = f(0)$$

- **$2^{\text{ième}}$ cas : Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| > 1$**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x^{2^{-n}}$$

On a alors :

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1})^2 = \left(x^{2^{-n-1}}\right)^2 = u_n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_{n+1}) = f(u_n) = f(u_0) = f(x)$$

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n} 2^{-n} = 0 \\ \lim\limits_{N\to 0} x^N = 1 \end{cases}$$

Par continuité de f en 1 on en déduit que :

$$\lim_{n} f(u_n) = f(1) = f(x)$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{tel que } |x| > 1, f(x) = f(1)$$

Par continuité de f en 1 on a :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(0) = f(1)$$

De même par continuité en -1 :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(0) = f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$$

Donc f est constante.

d) On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

On pose :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \end{cases}$$

C'est une suite arithmético-géométrique.
On cherche le point fixe :
On résout :

$$x = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2} v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (x-1) + 1$$

On a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + 1}{2}\right) = f(u_n) = f(x)$$

Donc la suite $\left(f(u_n)\right)$ est stationnaire. Or on sait que f est continue en 1 et :

$$\lim_n u_n = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n f(u_n) = f(1) = f(x)$$

Donc f est constante.

Exercice C.2 : Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations fonctionnelles suivantes :
a) $\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
b)$\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$
c)$\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$

a)

- **1^er^ cas : On raisonne sur $\mathbb{N}$.**

On pose la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, P_n : "f(x^n) = f(x)^n"$$

Initialisation : $f(0 \times x) = f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Longrightarrow f(0) = 0 = 0 \times f(x)$
Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose vrai P_n. On a alors :

$$f(nx) = nf(x)$$

De plus on a :

$$f\left((n+1)x\right) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$$

On a donc en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$$

- **2^ième^ cas : On étend sur $\mathbb{Z}$**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + (-x)\right) = f(x - x) = f(0) = f(x) + f(-x)$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

Donc f est impaire.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^-, f(-n) = -nf(1) = -f(n)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = nf(1)$$

- **3^ième^ cas : on étend sur $\mathbb{Q}$**

On a :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \exists(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}$$

On a alors :

$$f(a) = af(1) = f\left(b \times \frac{a}{b}\right) = b \times f\left(\frac{a}{b}\right) \text{ car } b \in \mathbb{N}$$

On a donc :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}f(1)$$

- **4^ième^ cas : On prolonge sur $\mathbb{R}$**

On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_n x_n = x$$

Autrement dit tout nombre irrationnel est limite d'une suite de rationnels. Il suffit de prendre par exemple la suite des décimale de x.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_n x_n = x$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n f(1)$$

Par continuité de f sur $\mathbb{R}$ on en déduit que :

$$\lim_n f(x_n) = f(x) = xf(1)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$$

Donc les seules fonctions continues qui vérifient :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Sont les fonctions linéaires :

$$f: x \mapsto ax, \text{où } a = f(1)$$

b) On constate que si $f(0) = 0$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$$

On suppose à présent que $f(0) \neq 0$.
On a donc :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0)^2 \Longrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0$$

Comme $f(0) \neq 0, f(0) = 1$.
De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x - x) = f(0) = f(x)f(-x) \neq 0$$

On en déduit que :

$$f(0) \neq 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$$

- **1er cas : On raisonne sur $\mathbb{N}^*$.**

On pose la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, P_n: \text{"}f(nx) = f(x)^n\text{"}$$

Initialisation : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = 1 = f(x)^0$
Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose vraie P_n. On a alors :

$$f(nx) = f(x)^n$$

De plus on a :

$$f((n + 1)x) = f(nx) \times f(x) = f(x)^n \times f(x) = f(x)^{n+1}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nx) = f(x)^n$$

On a donc en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1)^n$$

- **2ième cas : On étend sur $\mathbb{Z}$**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + (-x)) = f(x - x) = f(0) = f(x) \times f(-x) = 1$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^-, f(n) = \frac{1}{f(-n)} = \frac{1}{f(1)^{-n}} = f(1)^n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(1)^n$$

- **$3^{\text{ième}}$ cas : on étend sur $\mathbb{Q}$**

On a :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}$$

On a alors :

$$f(a) = f(1)^a = f\left(b \times \frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right)^b \text{ car } b \in \mathbb{N}$$

On a donc :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(1)^{\frac{a}{b}}$$

- **$4^{\text{ième}}$ cas : On prolonge sur $\mathbb{R}$**

On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_n x_n = x$$

Autrement dit tout nombre irrationnel est limite d'une suite de rationnels. Il suffit de prendre par exemple la suite des décimale de x.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_n x_n = x$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(1)^{x_n} = e^{x_n \ln(f(1))} \text{ car } f(1) > 0$$

Par continuité de f sur $\mathbb{R}$ on en déduit que :

$$\lim_n f(x_n) = f(x) = e^{x \ln(f(1))} = f(1)^x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)^x$$

Donc les seules fonctions continues qui vérifient :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Sont les fonctions linéaires puissances:

$$f: x \mapsto a^x, \text{où } a = f(1) \geq 0$$

c) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+x}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(x)} = |f(x)|$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

Si $f(0) = 0$ on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(0)} = 0$$

On suppose à présent qu'il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = 0$.
On a alors :

$$f(0) = f\left(\frac{x-x}{2}\right) = \sqrt{f(x) \times f(-x)} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \\ f(0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \end{cases}$$

On se place dans le cas où $f(0) > 0$.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \ln(f(x))$$

On a alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \ln\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\sqrt{f(x)f(y)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\big(f(x)\big) + \frac{1}{2}\ln\big(f(y)\big)$$
$$= \frac{h(x) + h(y)}{2}$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = h(x) - f(0)$$

On a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g\left(\frac{x+y}{2}\right) = h\left(\frac{x+y}{2}\right) - h(0)$$
$$= \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}h(y) - h(0)$$
$$= \frac{1}{2}\big(h(x) - h(0)\big) + \frac{1}{2}\big(h(y) - h(0)\big)$$
$$= \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

On a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$$

On remarque que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2 \times \frac{g(x) + g(y)}{2} = g(x) + g(y)$$

On utilise ensuite le résultat que l'on a vu précédemment au a) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xg(1)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + f(0) = xg(1) + f(0)$$

On a donc :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, h(x) = ax + b$$

On en déduit donc que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{ax}, \lambda > 0$$