Correction DS n°4

Exercice 1 : Equation différentielle de degré 3

Dans ce problème on se propose de résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E_0) : \; y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$$

On pose les trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1 : t \mapsto e^{-t}, f_2 : t \mapsto e^{-2t}\cos(t) \; et \; f_3 : t \mapsto e^{-2t}\sin(t)$$

1) a) Montrer que f_1 est solution de (E_0).
   b) Montrer que f_2 est solution de (E_0).

On admet pour la suite de cet exercice que f_3 est elle aussi solution de (E_0).

2) Montrer que pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels, la fonction $t \mapsto \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t)$ est-elle aussi solution de (E_0).

Il reste à montrer la réciproque.

3) Soit y une solution de (E_0). On pose $z = y'' + 4y' + 5y$.
   a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle :

$$z' + z = 0$$

   b) En déduire que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \; tel \; que \; \forall t \in \mathbb{R} \; y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \lambda e^{-t}$$

   c) En déduire que :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3 \; tel \; que \; y_0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$$

1) a) Il suffit de dériver trois fois. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) = e^{-t} \Longrightarrow f_1'(t) = -e^{-t} \Longrightarrow f_1''(t) = e^{-t} \Longrightarrow f_1'''(t) = -e^{-t}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall t \in \mathbb{R}, f_1'''(t) + 5f_1''(t) + 9f_1'(t) + 5f_1(t) = 0}$$

b) Là encore de dériver trois fois. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_2(t) = e^{-2t}\cos(t) \Longrightarrow f_2'(t) = e^{-2t}(-2\cos(t) - \sin(t))$$
$$\Longrightarrow f_2''(t) = e^{-2t}(3\cos(t) + 4\sin(t))$$
$$\Longrightarrow f_2'''(t) = e^{-2t}(-2\cos(t) - 11\sin(t))$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall t \in \mathbb{R}, f_2'''(t) + 5f_2''(t) + 9f_2'(t) + 5f_2(t) = 0}$$

2) On pose :

$$h : t \mapsto \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t)$$

Par linéarité de la dérivation, on a :

$$h' : t \mapsto \lambda_1 (f_1)'(t) + \lambda_2 (f_2)'(t) + \lambda_3 (f_3)'(t)$$
$$h'' : t \mapsto \lambda_1 (f_1)''(t) + \lambda_2 (f_2)''(t) + \lambda_3 (f_3)''(t)$$
$$h''' : t \mapsto \lambda_1 (f_1)'''(t) + \lambda_2 (f_2)'''(t) + \lambda_3 (f_3)'''(t)$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, h'''(t) + 5h''(t) + 9h'(t) + 5h(t) =$$
$$= \lambda_1 (f_1)'''(t) + \lambda_2 (f_2)'''(t) + \lambda_3 (f_3)'''(t) + 5\big(\lambda_1 (f_1)''(t) + \lambda_2 (f_2)''(t) + \lambda_3 (f_3)''(t)\big)$$
$$+ 9\big(\lambda_1 (f_1)'(t) + \lambda_2 (f_2)'(t) + \lambda_3 (f_3)'(t)\big) + 5\big(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t)\big)$$
$$= \boldsymbol{\lambda_1 \underbrace{\big(f_1'''(t) + 5f_1''(t) + 9f_1'(t) + 5f_1(t)\big)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\big(f_2'''(t) + 5f_2''(t) + 9f_2'(t) + 5f_2(t)\big)}_{=0} +}$$
$$\boldsymbol{+\lambda_3 \underbrace{\big(f_3'''(t) + 5f_3''(t) + 9f_3'(t) + 5f_3(t)\big)}_{=0} = 0}$$

Ainsi h est aussi solution de (E_0).

3) a) On pose :

$$z = y'' + 4y' + 5y, lalors \; z' = y''' + 4y'' + 5y'$$

On a donc :

$$z' + z = y''' + 4y'' + 5y' + y'' + 4y' + 5y = y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0 = 0$$

Car y est solution de (E_0).

b) On sait que :

$$z' + z = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, tel\ que\ \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \lambda e^{-t}$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{\exists \lambda \in \mathbb{R}, tel\ que\ \forall t \in \mathbb{R}, y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-t}}$$

c) On résout :

$$y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-t}$$

_ On commence par l'équation homogène : $y'' + 4y' + 5y = 0$

On résout :

$$(E_q): r^2 + 4r + 5 = 0 \Leftrightarrow r \in \{-2 - i; -2 + i\}$$

On en déduit donc que :

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \exists (\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2\ tel\ que\ \forall t \in \mathbb{R}, y_0(t) = (\lambda_2 \cos(t) + \lambda_3 \sin(t))e^{-2t}$$

_ On cherche ensuite une solution particulière à $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-t}$

On pose :

$$f_A: t \mapsto Ae^{-t}$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_A'' + 4f_A' + 5f_A = 2Ae^{-t}$$

Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-t}$ est solution particulière de $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-t}$.

_ On rassemble ensuite :

$$y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-t} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3\ tel\ que\ \forall t \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y(t) = (\lambda_2 \cos(t) + \lambda_3 \sin(t))e^{-2t} + \frac{\lambda}{2}e^{-t}}$$

c) Il suffit de poser $\lambda_1 = \frac{\lambda}{2}$ et on obtient :

$$\boldsymbol{y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-t} \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3\ tel\ que\ y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3}$$

Exercice 2 : Suite d'ordre 2 non linéaire

Dans tout cet exercice on pose :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ \lambda > 0 \\ u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

2) On pose la suite auxiliaire définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{2} + \frac{v_n}{2} + \ln(\lambda)$$

3) Soit $\alpha > 0$. On pose la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha n$$

Déterminer la valeur de α en fonction de λ pour que la suite (w_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{w_{n+1}}{2} + \frac{w_n}{2} + \ln(\lambda)$$

4) On pose la suite auxiliaire définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = v_n - w_n$$

a) Montrer que la suite (x_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2}$$

b) En déduire une expression de x_n en fonction de n.

c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

d) En déduire que si $\lambda = 1$ alors :

$$\lim u_n = (u_1 \times u_0)^{\frac{3}{2}}$$

1) On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P_n = "u_n > 0"$$

ATTENTION : Il faut faire une récurrence double, c'est-à-dire supposer que P_n et P_{n+1} est vraies pour avoir P_{n+1} et P_{n+2} vraies. Pour cela il faut initier P_0 et P_1 et supposer P_n et P_{n+1} vraies dans l'hérédité.

Initalisation : $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n et P_{n+1}. On a :

$$u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}$$

Or $\lambda > 0$ et $u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$ donc $u_{n+2} > 0$ donc P_{n+1} et P_{n+2} sont vraies.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$$

2) On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$$

On a alors :

$$v_{n+2} = ln(u_{n+2}) = ln\left(\lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}\right) = ln(\lambda) + ln\left(\sqrt{u_n}\right) + ln\left(\sqrt{u_{n+1}}\right) = ln(\lambda) + \frac{1}{2}ln(u_n) + \frac{1}{2}ln(u_{n+1})$$
$$= \frac{v_{n+1}}{2} + \frac{v_n}{2} + ln(\lambda)$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{2} + \frac{v_n}{2} + ln(\lambda)}$$

3) On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha n$$

On a alors :

$$w_{n+2} - \left(\frac{w_{n+1}}{2} + \frac{w_n}{2} + ln(\lambda)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(n+2) - \frac{1}{2}\alpha(n+1) - \frac{1}{2}\alpha n - ln(\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha = ln(\lambda)$$
$$\boxed{\Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}ln(\lambda)}$$

4) On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n = v_n - w_n$$

a) On a :

$$x_{n+2} = v_{n+2} - w_{n+2}$$
$$= \frac{v_{n+1}}{2} + \frac{v_n}{2} + ln(\lambda) - \left(\frac{w_{n+1}}{2} + \frac{w_n}{2} + ln(\lambda)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(v_{n+1} - w_{n+1}) + \frac{1}{2}(v_n - w_n)$$
$$= \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2}}$$

b) On a une suite linéaire récurrence d'ordre 2 :

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2}$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$$

On a :

$$\Delta=\frac{1}{4}+\frac{4}{2}=\frac{9}{4}>0$$

On a donc :

$$r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ r_2=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}=1 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}, x_{n+2}=\frac{x_{n+1}}{2}+\frac{x_n}{2} \Leftrightarrow \exists(\beta;\delta)\in\mathbb{R}^2, x_n=\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\delta}$$

c) On sait que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, x_n=v_n-w_n=ln(u_n)-\frac{2}{3}ln(\lambda)\,n=ln\left(\frac{u_n}{\lambda^{\frac{2}{3}n}}\right)$$

$$\Longrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda^{\frac{2}{3}n}e^{x_n}=\lambda^{\frac{2}{3}n}e^{\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\delta}$$

On sait de plus que :

$$\begin{cases} u_0=e^{\delta+\beta} \\ u_1=\lambda^{\frac{2}{3}}e^{\delta-\frac{1}{2}\beta} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \delta+\beta=ln(u_0) \\ \delta-\dfrac{1}{2}\beta=ln\left(\dfrac{u_1}{\lambda^{\frac{2}{3}}}\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2}\delta=ln\left(\sqrt{u_0}\times\frac{u_1}{\lambda^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$\Longrightarrow \delta=\frac{2}{3}ln\left(\sqrt{u_0}\times\frac{u_1}{\lambda^{\frac{2}{3}}}\right)=ln\left(u_0^{\frac{1}{3}}\times\frac{u_1^{\frac{2}{3}}}{\lambda}\right)$$

De même on a :

$$\beta=ln(u_0)-\delta=ln(u_0)-ln\left(u_0^{\frac{1}{3}}\times\frac{u_1^{\frac{2}{3}}}{\lambda}\right)=ln\left(\frac{\lambda u_0^{\frac{2}{3}}}{u_1^{\frac{2}{3}}}\right)$$

On a alors :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda^{\frac{2}{3}n}e^{\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\delta}$$

$$=\lambda^{\frac{2}{3}n}e^{ln\left(\frac{\lambda u_0^{\frac{2}{3}}}{u_1^{\frac{2}{3}}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+ln\left(u_0^{\frac{1}{3}}\times\frac{u_1^{\frac{2}{3}}}{\lambda}\right)}$$

$$=\lambda^{\frac{2}{3}n}\left(\frac{\lambda u_0^{\frac{2}{3}}}{u_1^{\frac{2}{3}}}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\times\left(u_0^{\frac{1}{3}}\times\frac{u_1^{\frac{2}{3}}}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{=\lambda^{\frac{2}{3}n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\times u_0^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\times u_1^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$

d) Si $\lambda=1$, on en déduit donc que :

$$lim\, u_n=u_0^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\times u_1^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Or on sait que :

$$\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \; car -1 < -\frac{1}{2} < 1$$

Donc par composée :

$$\boxed{\lim u_n = u_0^{\frac{1}{3}} u_1^{\frac{2}{3}}}$$

Exercice 3 : Une partie d'un oral Centrale MP

Le but de cet exercice est de calculer :

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

1) a) Montrer que :

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], \frac{2t}{1+t^2} \in [0;1]$$

b) En déduire que l'intégrale est bien définie.

Pour calculer I, nous allons déjà calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall t \in [0;1], \exists! \, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \; tel \; que \; t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

b) Démontrer que :

$$\forall x \in [0;\pi[, \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2} = \sin(x)$$

c) En déduire que :

$$\int_0^1 \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

3) a) Montrer à l'aide d'une IPP que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

b) En déduire la valeur de I_1.

4) Démontrer que :

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

1) On peut le faire de deux façons différentes.

M1 : Etude des variations

On pose :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$$

On a f dérivation sur $[0;\sqrt{3}]$ comme quotient de fonctions dérivables. De plus on a :

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], f'(t) = \frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} = 2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

t	0		1		$\sqrt{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], \frac{2t}{1+t^2} \in [0;1]$$

M2 : Plus rapide

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], \frac{2t}{1+t^2} \geq 0$$

De plus on a :

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], 1-\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+t^2-2t}{1+t^2} = \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \geq 0$$

Ainsi on a :

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], \frac{2t}{1+t^2} \leq 1$$

Ainsi on a :

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], \frac{2t}{1+t^2} \in [0;1]$$

b) On sait que l'ensemble de définition et de continuité de arcsinest $[-1;1]$. Or on a vu précédemment que :

$$\forall t \in [0;\sqrt{3}], \frac{2t}{1+t^2} \leq 1$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{g: t \mapsto \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \in \mathcal{C}^0([0;\sqrt{3}])}$$

Donc l'intégrale est bien définie.

---

2) a) On pose :

$$h: x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \; pour \; x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$$

On a alors h dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], h'(x) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} > 0$$

Ainsi h est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus on a :

$$h(0) = 0 \; et \; h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

On a donc :

_ h continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

_ h strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

_ $\begin{cases} h(0) = 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la bijection :

h réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;1]$.

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall t \in [0;1], \exists!\, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \; tel\; que \; t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

---

b) On a :

$$\forall x \in [0;\pi[, \frac{2\,tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2} = \frac{\frac{2\,sin\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2\,sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right) = sin\left(2\times\frac{x}{2}\right) = sin(x)$$

---

c) On pose le changement de variable :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

- **Les nouvelles bornes :**

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1 \end{cases}$$

- **Calcul du dt**

$$On\ a:$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \Longrightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$

- **On remplace :**

$$\int_0^1 \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\right)\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(x))\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \arcsin(sin(x)) = x$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(x))\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx}$$

---

3) a) On a par intégration par partie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \left[x\times\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx}$$

---

b) On a de plus :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx = -2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx = -2\left[\ln\left(\left|cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \ln(2)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\int_0^1 \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{2} - \ln(2)}$$

---

4) On a :

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \int_0^1 \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt + \int_1^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$$

Il reste à calculer

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

De la même façon que précédemment en posant le changement de variable :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

- **Les bornes**

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow t = \sqrt{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1 \end{cases}$$

- **Le calcul du dt :**

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

- **sOn remplace :**

$$\int_1^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \arcsin(\sin(x)) \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right], \sin(x) = \sin(\pi - x)\ et\ \pi - x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right], \arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$$

On a donc :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\pi - x}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

De la même façon que précédemment :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\pi - x}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \left[(\pi - x)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} - 2\left[\ln\left(\left|cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2} - 2\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2} + \ln(2)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = I_1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2} + \ln(2) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

Problème irrationnalité de π

Après avoir démontré l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans le cours, de e et de $\ln(2)$ dans les précédents devoirs, je vous propose ici de démontrer l'irrationnalité de π. Pour ce faire nous allons utiliser le dernier résultat vu dans le DS n°3 :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour cela nous allons montrer que π^2 est irrationnel.

Partie A : Etude d'une fonction polynomiale particulière.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

1) Déterminer les valeurs de $(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} a_{n+k}\, x^{n+k} = \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n} a_j x^j$$

2) On pose :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, Q_\ell(x) = x^\ell$$

a) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^k}{dx^k}\left(Q_\ell(x)\right) = Q_\ell^{(k)}(x) \begin{cases} \dfrac{\ell!}{(\ell-k)!} x^{\ell-k} si\ k \in [\![0;\ell]\!] \\ 0\ si\ k \geq \ell+1 \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) = \begin{cases} 0\ si\ i \leq n-1 \\ 0\ si\ i > 2n \\ a_i \times \dfrac{i!}{n!}\ si\ i \in [\![n;2n]\!] \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$$

d) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(1) \in \mathbb{Z}$$

(***Indice*** **: On pourra remarquer que** $\boldsymbol{P_n(X) = P_n(1-X)}$)

Partie B : Irrationnalité de π

Dans les questions suivantes on veut montrer que π^2 est un irrationnel et l'on va raisonner par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, b \neq 0, tel\ que\ \pi^2 = \frac{a}{b}$$

1) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(x)\right)$$

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$$

De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \pi\int_0^1 a^n P_n(x)\sin(\pi x)\,dx$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, , \forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)$$

Puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathbb{Z}$$

2) On pose la suite :

$$u_n = \frac{a^n}{n!}\ (où\ a = \pi \times b\ définie\ précédemment)$$

a) Montrer que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

c) Montrer que (u_n) converge.

d) En déduire que $\lim_n u_n = 0$

e) En déduire que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel\ que\ \forall n \geq n_0, \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{2}$$

3) Montrer que :

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

a) Démontrer que :

$$\forall n \geq n_0, A_n \in]0;1[$$

b) En déduire que π^2 est irrationnel.

c) En déduire que π est irrationnel.

Partie A : Etude d'une fonction polynomiale particulière

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{n+k}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall\ k \in [\![n; 2n]\!], a_{n+k} = \binom{n}{k} (-1)^k \in \mathbb{Z}}$$

2) a) On peut ici faire une récurrence mais cela est un peu lourd à écrire. On peut sinon décomposer le calcul :

On a :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, Q_\ell(x) = x^\ell$$

On a donc :

$$\frac{d}{dx}\big(Q_\ell(x)\big) = \ell x^{\ell-1} = \frac{\ell!}{(\ell-1)!} x^{\ell-1}$$

De même on a :

$$\frac{d^2}{dx^2}\big(Q_\ell(x)\big) = \frac{\ell!}{(\ell-1)!} \times (\ell-1)x^{\ell-2} = \frac{\ell!}{(\ell-2)!} x^{\ell-2}$$

Tant que $k \leq \ell$ on peut réitérer le procédé :

$$\frac{d^k}{dx^k}\big(Q_\ell(x)\big) = \ell \times (\ell-1) \times \dots \times (\ell-k+1)x^{\ell-k} = \frac{\ell!}{(\ell-k)!} x^{\ell-k}$$

(**Récurrence immédiate** sur $[\![0;\ell]\!]$).

Enfin on a :

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\big(Q_\ell(x)\big) = \ell!\ est\ une\ constante$$

On en déduit donc que :

$$\forall k > \ell, \frac{d^k}{dx^k}\big(Q_\ell(x)\big) = 0$$

---

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=n}^{2n} a_j x^j$$

On en déduit donc par linéarité de la dérivation :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^i}{dx^i}\big(P_n(x)\big) = \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{1}{n!} \sum_{j=n}^{2n} a_j x^j\right)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{j=n}^{2n} a_j \frac{d^i}{dx^i}\big(x^j\big)$$

Or on sait que :

$$\forall j \in [\![n;2n]\!], \forall i \geq 2n+1, \frac{d^i}{dx^i}\left(x^j\right) = 0$$

Donc :

$$\forall i \geq 2n+1, P_n^{(i)}(x) = 0 \; donc \; P_n^{(i)}(0) = 0$$

De plus on a :

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!], \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^i}{dx^i}\left(P_n(x)\right) = \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n} \frac{a_j j!}{(j-i)!} x^{j-i}$$

$$= \frac{x}{n!}\sum_{j=n}^{2n} \frac{a_j j!}{(j-i)!} x^{j-i-1} \; (avec \; j-i-1 \geq 0)$$

On a donc :

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!], P_n^{(i)}(0) = 0$$

Enfin si :

$$i \in [\![n;2n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^i}{dx^i}\left(P_n(x)\right) = \frac{1}{n!}\sum_{j=i}^{2n} \frac{a_j j!}{(j-i)!} x^{j-i}$$

$$= \frac{1}{n!} \times a_i \times i!$$

$$\boxed{\forall \boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{n};\boldsymbol{2n}]\!], (\boldsymbol{P_n})^{(\boldsymbol{i})}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a_i} \times \boldsymbol{i} \times \ldots \times (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})}$$

---

c) On sait que :

$$\forall \boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{n};\boldsymbol{2n}]\!], \boldsymbol{a_i} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \forall \boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{n};\boldsymbol{2n}]\!], \boldsymbol{a_i} \times \boldsymbol{i} \times \ldots \times (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}) \in \mathbb{Z}$$

---

d) On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \Longrightarrow P_n(1-x) = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = P_n(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall \ell \in [\![n;2n]\!], (P_n)^{(\ell)}(X) = (-1)^\ell (P_n)^{(\ell)}(1-X)$$

$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{\ell} \in [\![\boldsymbol{n};\boldsymbol{2n}]\!], (\boldsymbol{P_n})^{(\boldsymbol{\ell})}(\boldsymbol{1}) = (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{P_n})^{(\boldsymbol{\ell})}(\boldsymbol{0}) \in \mathbb{Z}$$

Partie B : Irrationnalité de π

1) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n(0) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(0)\right) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (\pi^2)^{n-k} P_n^{(2k)}(0)\right)$$

$$= b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} P_n^{(2k)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k} \times b^k \times P_n^{(2k)}(0)$$

Or on sait que :

$$(a,b) \in \mathbb{Z}^2$$

De même on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in [\![0;n]\!], (-1)^k P_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in [\![0;n]\!], (-1)^k a^{n-k} \times b^k \times P_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{F_n}(\boldsymbol{0}) \in \mathbb{Z}$$

De même comme $P_n^{(2k)}(1) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{F_n}(\boldsymbol{1}) \in \mathbb{Z}$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) = F_n''(x)\sin(\pi x) + \pi F_n'(x)\cos(\pi x) - \pi F'_n(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x)$$

$$= \left(F_n''(x) + \pi^2 F_n(x)\right)\sin(\pi x)$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(x)\right)$$

$$\Longrightarrow F''_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}P_n^{(2k+2)}(x)\right)$$

De plus on sait que $\deg(P_n) = 2n \Longrightarrow P_n^{(2n+2)}(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F''_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\pi^{2n-2k}P_n^{(2k+2)}(x)\right)$$

$$= b^n\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\pi^{2n-2k+2}P_n^{(2k)}(x)\right)$$

De plus on a :

$$\pi^2F_n(x) = b^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k+2}P_n^{(2k)}(x)\right)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) = \left(F_n''(x) + \pi^2F_n(x)\right)\sin(\pi x)$$

$$= b^n\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\pi^{2n-2k+2}P_n^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k+2}P_n^{(2k)}(x)\right)\sin(\pi x)$$

$$= b^n\pi^{2n+2}P_n(x)\sin(\pi x) = \pi^2a^nP_n(x)\sin(\pi x)$$

De plus on a :

$$A_n = \pi\int_0^1 a^nP_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi^2a^nP_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi^2a^nP_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 g_n'(x)dx$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow A_n = \frac{1}{\pi}\left(g_n(1) - g_n(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi F_n(1) + \pi F_n(0)\right) = F_n(1) - F_n(0) \in \mathbb{Z}}$$

D'après la question 2) a).

2) a) On sait que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \to 0}$$

b) On sait que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \forall n \geq n_0, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \epsilon$$

On en déduit donc avec $\epsilon = 1$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \forall n \geq n_1, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

$$\forall n \geq n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Longrightarrow \boldsymbol{\forall n \geq n_1, u_{n+1} \leq u_n}$$

Donc on en déduit donc que **(u_n) est décroissante à partir d'un certain rang**.

---

c) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge vers ℓ, $\ell \geq 0$

De plus si $\ell \neq 0$ on en déduit donc que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$$

Cela est impossible. On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{u_n \to 0}$$

d) On sait que :

$$\forall \epsilon > 0, , \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \epsilon$$

En posant $\epsilon = \frac{1}{2}$ on obtient :

$$\boldsymbol{\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel\ que\ \forall n \geq n_0, \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{2}}$$

---

3) a) On a par une étude de fonction que :

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) \in \left[0; \frac{1}{4^n \times n!}\right] \subset \left[0; \frac{1}{n!}\right]}$$

---

b) On sait que :

$$A_n = \pi \int_0^1 a^n P_n(x) \sin(\pi x)\, dx$$

De plus on a :

$$0 < P_n(x) < \frac{1}{n!}\ et \sin(\pi x) \geq 0\ \forall x \in [0;1]$$

$$\Longrightarrow 0 < a^n P_n(x) \sin(\pi x) < \frac{a^n}{n!} \sin(\pi x)$$

$$\Longrightarrow 0 < \pi \int_0^1 a^n P_n(x) \sin(\pi x)\, dx < 2 \times \frac{a^n}{n!}$$

Or on sait que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{a_n}{n!} \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n \geq n_0, 0 < A_n < 1}$$

d) On a démontré que :

$$\forall n \geq n_0, \begin{cases} A_n \in]0;1[\\ A_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cela est impossible donc π^2 est irrationnel.
De même par contraposée on sait que π rationnel implique π^2 rationnel (il suffit d'écrire π^2 comme le quotient des carrées de la fraction rationnelle de π). Donc **π est irrationnel.**