DS n°4
PCSI 2025-2026

Nous rappelons ici que la calculatrice est interdite. Un soin tout particulier sera apporté quant à la rédaction et au soin de la copie. Nous rappelons que les résultats doivent être encadrés ou soulignés, et qu'un trait devra être tiré entre chaque question.

Exercice 1 : Equation différentielle de degré 3

Dans ce problème on se propose de résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E_0) : \ y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$$

On pose les trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1 : t \mapsto e^{-t}, f_2 : t \mapsto e^{-2t}\cos(t) \ et \ f_3 : t \mapsto e^{-2t}\sin(t)$$

1) a) Montrer que f_1 est solution de (E_0).

b) Montrer que f_2 est solution de (E_0).

On admet pour la suite de cet exercice que f_3 est elle aussi solution de (E_0).

2) Montrer que pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels, la fonction $h = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ est-elle aussi solution de (E_0).

Il reste à montrer la réciproque.

3) Soit y une solution de (E_0). On pose $z = y'' + 4y' + 5y$.

a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle :

$$z' + z = 0$$

b) En déduire que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ tel \ que \ \forall t \in \mathbb{R} \ y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \lambda e^{-t}$$

c) En déduire que :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \ tel \ que \ y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$$

Exercice 2 : Suite d'ordre 2 non linéaire

Dans tout cet exercice on pose :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ \lambda > 0 \\ u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

2) On pose la suite auxiliaire définie par :

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$$

Montrer que :

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{2} + \frac{v_n}{2} + \ln(\lambda)$$

3) Soit $\alpha > 0$. On pose la suite :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha n$$

Déterminer la valeur de α en fonction de λ pour que la suite (w_n) vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{w_{n+1}}{2} + \frac{w_n}{2} + \ln(\lambda)$$

4) On pose la suite auxiliaire définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n = v_n - w_n$$

a) Montrer que la suite (x_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2}$$

b) En déduire une expression de x_n en fonction de n.

c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

d) En déduire que si $\lambda = 1$ alors :

$$lim\, u_n = (u_1 \times u_0)^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 3 : Une partie d'un oral Centrale MP

Le but de cet exercice est de calculer :

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

1) a) Montrer que :

$$\forall t \in \left[0; \sqrt{3}\right], \frac{2t}{1+t^2} \in [0; 1]$$

b) En déduire que l'intégrale est bien définie.

Pour calculer I, nous allons déjà calculer :

$$I_1 = \int_0^{1} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall t \in [0; 1], \exists!\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\ tel\ que\ t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

b) Démontrer que :

$$\forall x \in [0; \pi[, \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2} = \sin(x)$$

c) En déduire que :

$$\int_0^{1} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

3) a) Montrer à l'aide d'une IPP que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

b) En déduire la valeur de I_1.

4) Démontrer que :

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Problème irrationnalité de π

Après avoir démontré l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans le cours, de e et de $\ln(2)$ dans les précédents devoirs, je vous propose ici de démontrer l'irrationnalité de π.

Pour cela nous allons montrer que π^2 est irrationnel.

Partie A : Etude d'une fonction polynomiale particulière.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

1) Déterminer les valeurs de $(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} a_{n+k}\, x^{n+k} = \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n} a_j x^j$$

2) On pose :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, Q_\ell(x) = x^\ell$$

a) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^k}{dx^k}\left(Q_\ell(x)\right) = Q_\ell^{(k)}(x) \begin{cases} \dfrac{\ell!}{(\ell-k)!} x^{\ell-k} si\ k \in [\![0;\ell]\!] \\ 0\ si\ k \geq \ell+1 \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) = \begin{cases} 0\ si\ i \leq n-1 \\ 0\ si\ i > 2n \\ a_i \times \dfrac{i!}{n!}\ si\ i \in [\![n;2n]\!] \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$$

d) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_n^{(i)}(1) \in \mathbb{Z}$$

(*Indice* : On pourra remarquer que $P_n(X) = P_n(1-X)$)

Partie B : Irrationnalité de π

Dans les questions suivantes on veut montrer que π^2 est un irrationnel et l'on va raisonner par l'absurde. On suppose que :

$$\exists(a,b) \in \mathbb{N}^2, b \neq 0, tel\ que\ \pi^2 = \frac{a}{b}$$

1) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = b^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} P_n^{(2k)}(x)\right)$$

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$$

De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \pi \int_0^1 a^n P_n(x)\sin(\pi x)\,dx$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},, \forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)$$

Puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathbb{Z}$$

2) On pose la suite :

$$u_n = \frac{a^n}{n!}\ (où\ a = \pi \times b\ définie\ précédemment)$$

a) Montrer que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

c) Montrer que (u_n) converge.

d) En déduire que $\lim_n u_n = 0$

e) En déduire que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, tel\ que\ \forall n \geq n_0, \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2}$$

3) a) Montrer que :

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \geq n_0, A_n \in]0;1[$$

c) En déduire que π^2 est irrationnel.

d) En déduire que π est irrationnel.