Correction DS n°5

Exercice 1 : Suite linéaire récurrente d'ordre 3

Dans tout cet exercice on pose la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 4 \end{cases} et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Le but de cet exercice est de déterminer une expression de u_n en fonction de n.

1) a) On pose la suite matrice colonne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$X_{n+1} = AX_n$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Remarque : Dans toutes les questions suivantes, le but est de calculer A^n.

2) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et déterminer P^{-1}.

3) Démontrer que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$$

b) Calculer T^n pour tout entier naturel n.

b) En déduire u_n en fonction de n.

1) a) On a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

On pose alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Par récurrence immédiate ou par itération du procédé.

M1 : Par récurrence

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "X_n = A^n X_0"$$

Initialisation : $n = 0$

On a :

$$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier naturel n. On suppose vraie la proposition $\mathcal{P}(n)$. On a :

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

M2 : Par itération

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} \\ &= A \times AX_{n-2} = A^2X_{n-2} \\ &= A^2 \times AX_{n-3} = A^3X_{n-3} \\ &= \vdots \; en\ réitérant\ le\ procédé \\ &= \boldsymbol{A^nX_0} \end{aligned}$$

2) On peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauss :

$P \to I_3$	*Opérations élémentaires*	$I_3 \to P^{-1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - 4l_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 + L$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Ainsi $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et :

$$\boldsymbol{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

Remarque : Un calcul facile permet de vérifier que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = I_3$$

3) On a :

$$P^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Enfin on a :

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}$$

4) a) Là encore on peut le faire de deux façons.
Par récurrence immédiate ou par itération du procédé.

M1 : Par récurrence

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathcal{P}(n):\text{"}A^n=PT^nP^{-1}\text{"}$$

Initialisation : $n=0$

On a :

$$\begin{cases}A^0=I_3\\ PT^0P^{-1}=PP^{-1}=I_3\end{cases}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier naturel n. On suppose vraie la proposition $\mathcal{P}(n)$. On a :

$$A^{n+1}=A\times A^n=PT\underbrace{P^{-1}\times P}_{=I_3}T^nP^{-1}=PT^{n+1}P^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

M2 : Par itération

$$\begin{aligned}A^n&=A\times A\times\ldots\times A\\ &=PT\underbrace{P^{-1}\times P}_{=I_3}T\underbrace{P^{-1}\times P}_{=I_3}\ldots\underbrace{P^{-1}\times P}_{=I_3}TP^{-1}\\ &=PT^nP^{-1}\end{aligned}$$

b) Là encore on peut le faire de trois façons différentes.

M1 : Par conjecture et récurrence

$$T=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow T^2=\begin{pmatrix}(-2)^2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow T^3=\begin{pmatrix}(-2)^3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On peut conjecturer que :

$$T^n=\begin{pmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathcal{P}(n):\text{"}T^n=\begin{pmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{"}$$

Initialisation : $n=0$

On a :

$$\begin{cases}T^0=I_3\\ \begin{pmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3\end{cases}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier naturel n. On suppose vraie la proposition $\mathcal{P}(n)$. On a :

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$T^{n+1} = T \times T^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{(-2)^{n+1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{n+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

M2 : Avec le binôme de Newton

On a :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

Vérifions que $D\ et\ N$ commutent afin d'utiliser le binôme de Newton.

$$DN = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc appliquer le binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

Or on a :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N$$

De plus D est diagonale donc :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, T^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

M3 : Par opération élémentaire

On a :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut voir que la multiplication par T à droite. On aurait alors :

$$C_1 \leftarrow -2C_1, C_2 \leftarrow C_2\ et\ C_3 \leftarrow C_2 + C_3$$

On aurait alors en multipliant par T lui-même n fois :

$$C_1 \leftarrow (-2)^n C_1, C_2 \leftarrow C_2, C_3 \leftarrow nC_2 + C_3$$

On a alors :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) On a :

$$X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a :

$$X_n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \\ (-2)^{n+1} & 1 & n+1 \\ (-2)^{n+2} & 1 & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-2)^n + 8 - 6n}{9} & \frac{(-2)^{n+1} + 2 + 3n}{9} & \frac{(-2)^n - 1 + 3n}{9} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-2)^n + 8 - 6n}{9} + 3 \times \frac{(-2)^{n+1} + 2 + 3n}{9} + 4 \times \frac{(-2)^n - 1 + 3n}{9}$$

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{10 + 15n - (-2)^n}{9}}$$

Remarque : Nous n’avons pas besoin de calculer les deux lignes des matrices car nous ne voulons que le premier terme de X_n, à savoir u_n.

Exercice 2 : Mines-sup 2005

Dans toute cette partie on pose :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$
2) En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
3) Montrer que :

$$\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

Avec :

$$f: \begin{cases} [e; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{ln(x)} \end{cases}$$

4) Enoncé l’inégalité des accroissements finis.
5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$

6) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12}.

1) On pose la fonction :

$$f: \begin{cases} [e; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{ln(x)} \end{cases}$$

On sait que $f \in \mathcal{C}^1([e; +\infty[)$ et :

$$\forall x \in [e, +\infty[, f'(x) = \frac{ln(x) - 1}{ln^2(x)} \geq 0$$

On en déduit donc que f est croissante sur $[e; +\infty[$.
Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n): "v_n \geq e"$$

Initialisation : $n = 0$. $v_0 = 3 > e \Longrightarrow \mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$v_n \geq e \Longrightarrow f(v_n) \geq f(e) \text{ car } f \text{ est croissante sur } [e, +\infty[\Longrightarrow v_{n+1} \geq e$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e}$$

2) On sait que la suite (v_n) est monotone car f est croissante sur $[e; +\infty[$ et l'intervalle $[e; +\infty[$ est stable par f.
De plus on sait que :

$$v_1 - v_0 = \frac{v_0(1 - ln(v_0))}{ln(v_0)} = \frac{3}{ln(3)} \times (1 - ln(3)) < 0$$

On en déduit donc que (v_n) est décroissante, minorée par e donc elle converge.
De plus on sait que $\lim\limits_n v_n = \ell$ vérifie l'équation $f(x) = x$.

Or on sait que :

$$\frac{x}{ln(x)} = x \Leftrightarrow ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\lim_n v_n = e}$$

3) On sait que :

$$\forall x \in [e; +\infty[, f'(x) = \frac{ln(x) - 1}{ln^2(x)}$$

Cette fonction est dure à calculer. Etudions la dérivée seconde :

$$\forall x \geq e, f''(x) = \frac{\frac{ln^2(x)}{x} - \frac{2\,ln(x)}{x}(ln(x) - 1)}{ln^4(x)} = \frac{2 - ln(x)}{x ln^3(x)}$$

On sait que :

$$2 - ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^2$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	e $\qquad$ $e2$ $\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
f'	$\nearrow$ $\qquad$ $\searrow$

De plus on sait que : $f'(e) = 0$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x) - 1}{ln^2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ln(x)} = 0$$

On a de plus :

$$f'(e^2) = \frac{1}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}}$$

5) On sait d'après la question 3) que f est $\frac{1}{4}$ −lipschitzienne (donc contractante). On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in [e. +\infty[, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{4}|y - x|$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e| \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |3 - e| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \ (\text{récurrence immédiate})}$$

6) On a :

$$4^5 > 1000 \Longrightarrow 4^{20} > 10^{12} \Longrightarrow |v_{20} - e| \leq 10^{-12}$$

On peut donc en déduire que v_{20} est une valeur approchée de e à 10^{-12}

Problème 1 : Mines-sup 2007

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall t > 0, f(t) = e^{-\frac{1}{t}} \, et \, g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Partie A : Etude de f et g.

1) a) Montrer que $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[)$.

b) Démontrer que :

$$\forall t > 0, tf'(t) = g(t)$$

2) a) Démontrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$. Nous le noterons dans toute la suite g.

b) Démontrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

3) Soit H la primitive de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ s'annulant en 1. Calculer H.

Partie B : Une suite implicite

Soit $n \geq 3$. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = \frac{t}{n}$ d'inconnue $t > 0$.

1) a) Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]0; 1[$ que l'on notera α_n.

(On montrerait identiquement que (E_n) admet une unique solution sur $]1; +\infty[$. On ne demande pas de le faire !). On note β_n cette solution.

b) Montrer que (α_n) et (β_n) sont monotones.

c) Et-il possible que l'une des deux suites convergent vers $\ell > 0$? En déduire leur limite.

Partie C : Etude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de $(E): x^2y' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous allons, sans aucun calcul explicite de y, déterminer la suite des $y^{(n)}(0) = u_n$ à partir de (E).

1) Que vaut $u_0 = y(0)$?

2) a) En dérivant (E), calculer $u(1) = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.

b) Peut-on avoir y de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$? (Avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$).

3) Soit n un entier naturel.

a) On suppose ici que $n \geq 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que :

$$\forall x \geq 0, x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^n(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

b) En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

c) Donner une formule explicite de u_n en utilisant les factorielles, valable pour $n \geq 2$.

Partie A :

1) a) On a :

$$t \mapsto \frac{1}{t} \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[)$$
$$t \mapsto e^t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Par composée et produit, $(g, f) \in \left(\mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[)\right)^2$.

b) On a :

$$\forall t > 0, f'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}} = \frac{1}{t} \times \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{t}g(t)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall t > 0, tf'(t) = g(t)}$$

2) a) On a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \; (par\ croissance\ comparée)$$

On peut donc prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

b) On a :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0\ (par\ croissance\ comparée)$$

On en déduit donc que g est dérivable en 0 $g'(0) = 0$.

3) On a :

$$h(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) = te^{-t}$$

On peut le faire de différentes façons.

Méthode 1 : Par IPP

On a :

$$\boldsymbol{H(t) = \int_1^t xe^{-x}\,dt = [-xe^{-x}]_1^t + \int_1^t e^{-x}\,dt = e^{-1} - te^{-t} - e^{-t} + e^{-1} = \frac{2}{e} - (1+t)e^{-t}}$$

Méthode 2 : Par instinct

On pose :

$$H(t) = (at+b)e^{-t} \Longrightarrow H'(t) = (a - at - b)e^{-t}$$

Ainsi H est une primitive de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Longrightarrow H(t) = (-1-t)e^{-t} + c$$

Représente l'ensemble des primitives de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$.

On a ensuite que $H(1) = 0 \Longrightarrow c = \frac{2}{e}$.

Ainsi :

$$\boldsymbol{\forall t > 0, H(t) = \frac{2}{e} - (1+t)e^{-t}}$$

Partie B :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$f(t) = \frac{t}{n} \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{n}$$

Etudions les variations de $g \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[)$.

On a :

$$\forall t > 0, g'(t) = \frac{t \times f'(t) - f(t)}{t^2} = \frac{e^{-\frac{1}{t}}\left(\frac{1}{t} - 1\right)}{t^2} = \frac{(1-t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^3}$$

De plus on a :

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} = 0$$

On a alors :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

De plus on sait que :

$$\forall n \geq 3, n > e \Longrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$$

On a donc :

- g continue sur $[0;1]$
- g strictement croissante sur $[0;1]$

D'après le théorème de la bijection :

$$\forall y \in \left[0;\frac{1}{e}\right], \exists!\, t \in [0;1]\ tel\ que\ g(t) = y$$

Comme :

$$\boldsymbol{\forall n \geq 3, \frac{1}{n} \in \left[0;\frac{1}{e}\right] \Longrightarrow \forall n \geq 3, \exists!\, \alpha_n \in [0;1]\ tel\ que\ g(\alpha_n) = \frac{1}{n}}$$

Par le même raisonnement on a :

$$\boldsymbol{\forall n \geq 3,, \exists!\, \beta_n \in [1;+\infty[\ tel\ que\ g(\beta_n) = \frac{1}{n}}$$

b) On a :

$$\forall n \geq 3, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Longrightarrow \forall n \geq 3, g(\alpha_{n+1}) < g(\alpha_n) \Longrightarrow \forall n \geq 3, \alpha_{n+1} < \alpha_n$$

Car g est croissante sur $[0;1]$ donc (α_n) est décroissante.
De même on a :

$$\forall n \geq 3, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Longrightarrow \forall n \geq 3, g(\beta_{n+1}) < g(\beta_n) \Longrightarrow \forall n \geq 3, \beta_n < \beta_{n+1}$$

Car g est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc (β_n) est croissante.

c) La suite (α_n) est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. Supposons que $\ell > 0$. On a alors par continuité de g sur $]0;+\infty[$:

$$\lim_{n\to\infty} g(\alpha_n) = g\left(\lim_{n} \alpha_n\right) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = g(\ell) \Longrightarrow 0 = g(\ell)$$

Or on sait que :

$$\forall t > 0, g(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} \neq 0$$

On en déduit donc que $\boldsymbol{\ell = 0}$.
De même on a (η_n) est croissante donc soit elle converge vers $\ell' \geq 1$, soit elle tend vers $+\infty$. Si $\beta_n \to \ell'$ alors par continuité :

$$\lim_{n\to\infty} g(\beta_n) = g(\ell') \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = g(\ell') \Longrightarrow 0 = g(\ell') \Longrightarrow \ell' = 0\ (absurde\ car\ \forall n \geq 3, \beta_n \geq 1)$$

Ainsi $\boldsymbol{\beta_n} \to +\infty$.

Partie C :

1) On a :

$$(\mathrm{E}): \mathrm{x}^2\mathrm{y}' + \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 \Longrightarrow 0^2 \times y'(0) + y(0) = 0^2 \Longrightarrow y(0) = 0 = u_0$$

2) a) On a :

$$\forall x \geq 0, \mathrm{x}^2\mathrm{y}' + \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 \Longrightarrow 2xy'(x) + x^2y''(x) + y'(x) = 2x \Longrightarrow y'(0) = 0 = u_1$$

De même on a :

$$2xy'(x) + x^2y''(x) + y'(x) = 2x \Longrightarrow 2y'(x) + 4xy''(x) + x^2y^{(3)}(x) + y''(x) = 2 \Longrightarrow y''(0) = 2 = u_2$$

b) Si on pose :

$$y: x \mapsto ax^2 + bx + c$$

On a alors :

$$y(0) = c, y'(0) = b\ et\ y''(0) = 2a$$

Si y solution de (E) sir $\mathbb{R}^+$, alors :

$$\boldsymbol{c = b = 0\ et\ a = 1}$$

Or $y(x) = x^2$ n'est pas solution de (E).

3) a) En dérivant n fois (E) pour $n \geq 3$ on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{x}^2\mathrm{y}' + \mathrm{y}) = \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{x}^2) \Longrightarrow$$

Or on a :

$$\forall n \geq 3, \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{x}^2) = 0$$

De plus on a grâce à Leibniz :

$$\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{x}^2\mathrm{y}' + \mathrm{y}) = \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{x}^2\mathrm{y}') + \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{y}) = \binom{n}{0} x^2 \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{y}') + \binom{n}{1} 2x \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\mathrm{y}') + \binom{n}{2} 2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\mathrm{y}') + \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{y})$$
$$= x^2y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) + y^{(n)}(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 3, \frac{d^n}{dx^n}(x^2y' + y) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2) \Longrightarrow x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^n(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

b) En prenant $x = 0$ dans l'équation précédente on a :

$$\boldsymbol{u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0}$$

c) On peut le faire de deux façons. Soit en réitérant le procédé, soit par récurrence. Cependant ici nous n'avons pas d'hypothèse de récurrence. Il faut en trouver une !

On sait que :

$$\forall n \geq 3, u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_3 = -3 \times 2u_2 = -3 \times 2^2 \\ u_4 = -4 \times 3u_3 = 4 \times 3^2 \times 2^2 \\ u_5 = -5 \times 4u_4 = 5 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 \end{cases}$$

On peut donc **conjecturer** que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = (-1)^n \times n! \times (n-1)! = \frac{(-1)^n}{n} \times (n!)^2}$$

Montrons le par récurrence.

Initialisation : $n = 2$

On a :

$$u_2 = 2$$
$$\frac{(-1)^2}{2} \times (2!)^2 = 2$$

Donc la conjecture est vraie pour $n = 2$

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose la conjecture vraie pour ce n.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -(n+1)nu_n \ (question\ 3)c)) \\ &= -(n+1)n \times \frac{(-1)^n}{n} \times (n!)^2 \ (HR_n) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\big((n+1)!\big)^2 \end{aligned}$$

Donc la conjecture est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Méthode 2 : Par itération

$$\begin{aligned} u_n &= -n(n-1)u_{n-1} \\ &= n(n-1)^2(n-2)u_{n-2} \\ &= -n(n-1)^2(n-2)^2(n-3)u_{n-3} \\ &= \vdots \ par\ itération \\ &= (-1)^n \times n \times (n-1)^2 \times \ldots . \times 3^2 \times 2 \times u_2 \end{aligned}$$

Or $u_2 = 2$ donc on a :

$$\boldsymbol{\forall n \geq 2, u_n = (-1)^n \times n \times [(n-1)!]^2}$$

Problème 2 : Irrationnalité de e

Le but de ce problème est d'établir que $e \notin \mathbb{Q}$ par une autre méthode que celle donnée en DS au PCSI génération 2023-2024 (étant donné que vous êtes bien plus fort qu'eux…).

Partie A : Une suite qui converge vers *e*

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx$$

1) Démontrer que I_n est bien définie pour tout entier naturel n.

2) Calculer I_0.

3) On pose :

$$g:\begin{cases}[1,e]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{1+\ln(x)}{x}\end{cases}$$

En calculant la dérivée de g, déterminer la valeur de I_2.

4) a) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, I_{n+1}=-e^{-1}+(n+1)I_n$$

b) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, I_n=n!\left(1-e^{-1}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

6) a) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, I_n=\int_0^1 t^n e^{-t}dt$$

b) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$$

Partie B : $e\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, b_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, b_n\in\mathbb{N}$$

2) Déduire des résultats de la partie A que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad 0\le n!\,e-b_n\le\frac{e}{n+1}$$

3) En raisonnant par l'absurde, démontrer que e est irrationnel.

Partie A :

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a par produit :

$$x\mapsto\frac{\ln(x)^n}{x^2}\in\mathcal{C}^0([1;e])$$

Donc I_n est bien définie pour tout n entier naturel.

2) On a :

$$I_0=\int_1^e\frac{\ln(x)^0}{x^2}dx=\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=1-e^{-1}$$

3) On pose :

$$g: x\mapsto\frac{1+\ln(x)}{x}\ sur\ [1;e]$$

On a alors $g\in\mathcal{C}^1([1;e])$ et :

$$\forall x\in[1;e], g'(x)=\frac{1-1-\ln(x)}{x^2}=-\frac{\ln(x)}{x^2}$$

On en déduit donc que :

$$I_1=\int_1^e\frac{\ln(x)^1}{x^2}dx=[-g(x)]_1^e=g(1)-g(e)=1-2e^{-1}$$

4) a) On a :

$$I_{n+1}=\int_1^e \frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\times \ln^{n+1}(x)\right]_1^e+(n+1)\int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2}dx=-e^{-1}+(n+1)I_n$$

b) On peut le faire de deux façons. Le plus simple étant de le faire par récurrence vu qu'ils nous donnent le résultat ! Je commence par cela.

Méthode 1 : Par récurrence

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}(n): "I_n=n!\left(1-e^{-1}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)"$$

Initialisation : $n=0$

On a d'après la question 2) :

$$I_0=1-e^{-1}$$

Or on sait que :

$$0!\left(1-e^{-1}\times\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!}\right)=1-\frac{e^{-1}}{0!}=1-e^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$I_{n+1}=-e^{-1}+(n+1)I_n\ (question\ 4)a))$$
$$=-e^{-1}+(n+1)n!\left(1-e^{-1}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\ (hypothèse\ de\ récurrence)$$
$$=-e^{-1}+(n+1)!\left(1-e^{-1}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=(n+1)!\left[\left(-\frac{e^{-1}}{(n+1)!}\right)+1-e^{-1}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right]$$
$$=(n+1)!\left[1-e^{-1}\times\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\right]$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Méthode 2 : Par itération

On a d'après la question 4) a) :

$$\forall n\in\mathbb{N}, I_n=nI_{n-1}-e^{-1}$$
$$=n[(n-1)I_{n-2}-e^{-1}]-e^{-1}=n(n-1)I_{n-2}-[n+1]e^{-1}$$
$$=n(n-1)[(n-2)I_{n-3}-e^{-1}]-[n+1]e^{-1}=\frac{n!}{(n-3)!}I_{n-3}-\left[\frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{n!}\right]e^{-1}$$
$$=\frac{n!}{(n-3)!}[(n-3)I_{n-4}-e^{-1}]-\left[\frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{n!}\right]e^{-1}$$
$$=\frac{n!}{(n-4)!}I_{n-4}-n!\left[\frac{1}{(n-3)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]e^{-1}$$
$$=\vdots$$
$$=\vdots\ (en\ réitérant\ le\ procédé\ on\ obtient)$$
$$=\frac{n!}{0!}I_0-n!\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]e^{-1}$$
$$=n!\,(1-e^{-1})-n!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1}$$
$$=n!\left[1-e^{-1}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1}\right]$$

Or on sait que :

$$1=\frac{1}{0!}$$

On a donc :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{I_n} = \boldsymbol{n}!\left[\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{e^{-1}}}{\mathbf{0}!} - \left(\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!}\right)\boldsymbol{e^{-1}}\right] = \boldsymbol{n}!\left[\mathbf{1} - \left(\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!}\right)\boldsymbol{e^{-1}}\right]$$

6) a) On effectue un changement de variable.
On pose :

$$x = e^t \Leftrightarrow t = \ln(x)$$

- **On change les bornes**

$$\begin{cases} x = 1 \Longrightarrow t = 0 \\ x = e \Longrightarrow t = 1 \end{cases}$$

- **Calcul du dx**

On a :

$$x = e^t \Longrightarrow dx = e^t dt$$

- **Changement de l'intégrale**

$$I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{[ln(e^t)]^n}{e^{2t}} e^t dt = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

b) On a :

$$\forall t \in [0;1], 0 \leq e^{-t} \leq 1$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in [0;1], 0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n \ \ (car\ t^n \geq 0\ sur\ [0;1])$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$0 \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

Or on a :

$$\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{0} \leq \boldsymbol{I_n} \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}$$

c) On sait que :

$$\lim_n \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$\lim_n I_n = 0$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!\left[1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) e^{-1}\right]$$

Comme :

$$\lim_n n! = +\infty$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) e^{-1} = 0$$

On a donc :

$$\lim_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!} = \boldsymbol{e}$$

Partie B :

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

De plus on a :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \frac{n!}{k!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (k+1) \in \mathbb{N}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{N}}$$

2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!\left[1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1}\right]$$

On en éduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ n!\left[1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1}\right] \leq \frac{1}{n+1}$$

Or $e > 0$ donc en multipliant les termes de la double inégalité par e on obtient :

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ e \times n! - b_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3) On raisonne par l'absurde en supposant que $e \in \mathbb{Q}$. On a :

$$e \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \ tel\ que\ e = \frac{p}{q}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{p}{q} \times n! - b_n \leq \frac{e}{n+1} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq p \times n! - q \times b_n \leq q \times \frac{e}{n+1}$$

Or on sait d'après la question 1 de la partie B que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{N}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p \times n! - q \times b_n$$

De plus on a :

$$\lim_{n} q \times \frac{e}{n+1} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \forall n \geq N_0, q \times \frac{e}{n+1} < 1$$

Ainsi on a :

$$\forall n \geq N_0, p \times n! - q \times b_n \in \mathbb{N} \cap [0;1[$$

On a donc :

$$\forall n \geq N_0, p \times n! - q \times b_n = 0$$

Donc la suite $u_n = \ p \times n! - q \times b_n$ est nulle à partir d'un certain rang.
On a donc :

$$\forall n \geq N_0, \frac{b_n}{n!} = \frac{p}{q}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{b_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Ainsi la suite (v_n) est strictement croissante donc ne peut pas être stationnaire à partir d'un certain rang. On obtient une contradiction. Donc l'hypothèse $e \in \mathbb{Q}$ est fausse.
Donc : $\boldsymbol{e \notin \mathbb{Q}}$