DS n°5 PCSI 2024-2025

Exercice 1 : Suite linéaire récurrente d'ordre 3

Dans tout cet exercice on pose la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \\ u_2 = 4 \end{cases} et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Le but de cet exercice est de déterminer une expression de u_n en fonction de n.

1) a) On pose la suite matrice colonne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$X_{n+1} = AX_n$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Remarque : Dans toutes les questions suivantes, le but est de calculer A^n.

2) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et déterminer P^{-1}.

3) Démontrer que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$$

b) Calculer T^n pour tout entier naturel n.

b) En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 2 : Mines-sup 2005

Dans toute cette partie on pose :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{ln(v_n)} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{v_n} \geq \mathrm{e}$

2) En déduire que $(\mathrm{v_n})$ converge et déterminer sa limite.

3) Montrer que :

$$\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

Avec :

$$f : \begin{cases} [e; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{ln(x)} \end{cases}$$

4) Enoncé l'inégalité des accroissements finis.

5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$

6) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12}.

Problème 1 : Mines-sup 2007

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall t > 0, f(t) = e^{-\frac{1}{t}} \; et \; g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Partie A : Etude de f et g.

1) a) Montrer que $(f, g) \in \mathcal{C}^{\infty}(]0; +\infty[)$.

b) Démontrer que :

$$\forall t > 0, tf'(t) = g(t)$$

2) a) Démontrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$. Nous le noterons dans toute la suite g.

b) Démontrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

3) Soit H la primitive de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ s'annulant en 1. Calculer H.

Partie B : Une suite implicite

Soit $n \geq 3$. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = \frac{t}{n}$ d'inconnue $t > 0$.

1) Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.

2) a) Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]0; 1[$ que l'on notera α_n. (On montrerait identiquement que (E_n) admet une unique solution sur $]1; +\infty[$. On ne demande pas de le faire !). On note β_n cette solution.

b) Montrer que (α_n) et (β_n) sont monotones.

c) Et-il possible que l'une des deux suites convergent vers $\ell > 0$? En déduire leur limite.

Partie C : Etude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de $(E): x^2y' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. Nous allons, sans aucun calcul explicite de y, déterminer la suite des $y^{(n)}(0) = u_n$ à partir de (E).

1) Que vaut $u_0 = y(0)$?

2) a) En dérivant (E), calculer $u(1) = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.

b) Peut-on avoir y de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$? (Avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

3) Soit n un entier naturel.

a) On suppose ici que $n \geq 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que :

$$\forall x \geq 0, x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

b) En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

c) Donner une formule explicite de u_n en utilisant les factorielles, valable pour $n \geq 2$.

Problème 2 : Irrationnalité de *e*

Le but de ce problème est d'établir que $e \notin \mathbb{Q}$ par une autre méthode que celle donnée en DS au PCSI génération 2023-2024 (étant donné que vous êtes bien plus fort qu'eux…).

Partie A : Une suite qui converge vers *e*

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx$$

1) Démontrer que I_n est bien définie pour tout entier naturel n.

2) Calculer I_0.

3) On pose :

$$g: \begin{cases} [1, e] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1 + \ln(x)}{x} \end{cases}$$

En calculant la dérivée de g, déterminer la valeur de I_1.

4) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

6) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

Partie B : $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{N}$$

2) Déduire des résultats de la partie A que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq n!\, e - b_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3) En raisonnant par l'absurde, démontrez que e est irrationnel.