Correction DS n°5

Exercice 1

Dans cet exercice on cherche toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$ suivante :

$$(\mathcal{R}) : \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

On pose :

$$E = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \ tel \ que \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)\}$$

1) Déterminer une fonction f de E.

2) Démontrer que :

$$\begin{cases} f \in E \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

On suppose à présent jusqu'à la fin de l'exercice que $f(0) \neq 0$.

On pose :

$$\boldsymbol{E^* = \{f \in E \ tel \ que \ f(0) \neq 0\}}$$

3) a) Démontrer que :

$$\forall f \in E^*, f(0) = 1$$

b) En déduire que :

$$f \in E^* \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$$

c) Démontrer que :

$$\forall f \in E^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall f \in E^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

$\left(\boldsymbol{Indice} : on \ pourra \ utiliser \ le \ fait \ que \ x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}, ou \ la \ continuit\acute{e} \ de \ f\right)$

5) Dans toute cette question on a $f \in E^*$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = [f(x)]^n$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = [f(x)]^n$$

c) En déduire que :

$$\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = [f(1)]^q$$

d) Déterminer l'ensemble E.

1) La fonction $x \mapsto e^x \in E$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R} \ f(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)}$$

Bien entendu la fonction $x \mapsto 0, notée \ 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ aussi !

2) On suppose ici $f(0) = 0$. On a alors :

$$\boldsymbol{f(x) = f(x+0) = f(x) \times f(0) = 0}$$

3) a) On a :

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2$$

Comme $f(0) \neq 0$, on a : $f(à° = f(0)^2 \Longrightarrow \boldsymbol{f(0) = 1}$

b) On a :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x) = 1}$$

c) On a :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1 \neq 0 \Longrightarrow f(x) = 0}$$

4) On a :

$$\boldsymbol{f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0}$$

On peut aussi raisonner par contraposée. Si on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < 0$. On a alors :

$$f(0) = 1 \ et \ f(x_0) < 0$$

Comme f est continue et change de signe, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; x_0]$ tel que $f(c) = 0$. Or cela est **impossible** !

5) a) Par récurrence !

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = "\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = [f(x)]^n"$$

Initialisation : n = 0.

$$f(0 \times x) = f(0) = 1 = [f(x)]^0 \ (car\ f(x) \neq 0)$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(\mathrm{n})$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = [f(x)]^n$$

$$\Longrightarrow\ f\big((n+1)x\big) = f(nx+x) = f(nx) \times f(x) = [f(x)]^n \times f(x) = [f(x)]^{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

b)

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{f}\big(\mathrm{x} + (-\mathrm{x})\big) = \mathrm{f}(\mathrm{x} - \mathrm{x}) = \mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) \times \mathrm{f}(-\mathrm{x}) = 1$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^-, f(n) = \frac{1}{f(-n)} = \frac{1}{f(1)^{-n}} = f(1)^n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(1)^n$$

c) On a :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}$$

On a alors :

$$f(a) = f(1)^a = f\left(b \times \frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right)^b \ \ car\ b \in \mathbb{N}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{f(x) = f\left(\frac{a}{b}\right) = f(1)^{\frac{a}{b}}}$$

d) On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire que :

$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \exists (\mathrm{x_n}) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_{n} \mathrm{x_n} = \mathrm{x}$$

Autrement dit tout nombre irrationnel est limite d'une suite de rationnels. Il suffit de prendre par exemple la suite des décimale de x.

Soit $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe $(\mathrm{x_n}) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_{n} \mathrm{x_n} = \mathrm{x}$$

Or on sait que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{f}(\mathrm{x_n}) = \mathrm{f}(1)^{\mathrm{x_n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{x_n} \ln(\mathrm{f}(1))} \text{ car } \mathrm{f}(1) > 0$$

Par continuité de f sur $\mathbb{R}$ on en déduit que :

$$\lim_{n} \mathrm{f}(\mathrm{x_n}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x} \ln(\mathrm{f}(1))} = \mathrm{f}(1)^{\mathrm{x}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(1)^{\mathrm{x}}$$

Donc les seules fonctions continues qui vérifient :

$$\forall (\mathrm{x}; \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{f}(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) \times \mathrm{f}(\mathrm{y})$$

Sont les fonctions linéaires puissances:

$$\boldsymbol{E = \{f : x \mapsto a^x, \text{où } a = f(1) \geq 0\}}$$

Problème 2 : Une puissance de matrice

Partie A : Propriétés générales sur les matrices transposées

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et n colonnes. On définit la matrice transposée de A, notée A^T, par : $A^T = \left(a_{j,i}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On pose ici :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$$

Déterminer A^T.

2) Démontrer que :

$$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Tr(AA^T)=0 \Leftrightarrow A=0_n$$

(On rappelle que $Tr(A)$ est la somme des coefficients diagonaux de A :

$$Tr(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,k}$$

3) a) Démontrer que :

$$\forall (A,B)\in\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, (A\times B)^T=B^T\times A^T$$

b) En déduire par récurrence que :

$$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall n\in\mathbb{N}, (A^n)^T=(A^T)^n$$

Dans toute la suite de ce problème on a :

Soit $\mathrm{p}\in]0;1[$. On définit la matrice :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{p} & 0 & 0\\ 1-\mathrm{p} & \mathrm{p} & 0\\ 0 & 1-\mathrm{p} & 1\end{pmatrix}$$

Partie B : Calcul de A^{n} par récurrence

1) Calculer A^2. Que vaut A^0?

2) Montrer que, pour tout entier $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$, il existe trois réels $\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n}$ et $\mathrm{c_n}$ tels que :

$$\mathrm{A}^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix}\mathrm{p}^{\mathrm{n}} & 0 & 0\\ \mathrm{a_n} & \mathrm{p}^{\mathrm{n}} & 0\\ \mathrm{b_n} & \mathrm{c_n} & 1\end{pmatrix}$$

On ne demande pas d'expliciter $\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n}$ et $\mathrm{c_n}$ pour le moment !

3) Déterminer la valeur de $\mathrm{c_n}$ pour tout entier naturel n.

4) a) Montrer que :

$$\forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}, \mathrm{a_{n+2}}=2\mathrm{p}\mathrm{a_{n+1}}-\mathrm{p}^2\mathrm{a_n}$$

b) En déduire la valeur de $\mathrm{a_n}$ pour tout entier naturel n.

5) On pose $\mathrm{U}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On pose :

$$\mathrm{E}=\{\mathrm{M}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathrm{M}\times\mathrm{U}=\mathrm{U}\}$$

a) Montrer que E est stable par produit matriciel : $\forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathrm{E}^2, \mathrm{M}\times\mathrm{N}\in\mathrm{E}$.

b) Caractériser les éléments de E par une propriété sur leurs lignes ou leurs colonnes.

c) On pose $\mathrm{T}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, la matrice transposée de A. Déterminer T.

d) Montrer que $\mathrm{T}\in\mathrm{E}$.

e) En déduire que $\mathrm{T}^{\mathrm{n}}\in\mathrm{E}, \forall\mathrm{n}\in\mathbb{N}$.

f) En déduire que :

$$\forall\mathrm{n}\in\mathbb{N}, \mathrm{b_n}=1-\mathrm{n}\mathrm{p}^{\mathrm{n}-1}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{p}^{\mathrm{n}}$$

6) Déterminer $\mathrm{A}^{\mathrm{n}}, \mathrm{n}\in\mathbb{N}$.

Partie C : Avec le binôme

Dans cette partie on définit les matrices :

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}\mathrm{p} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{p} & 0\\ 1-\mathrm{p} & 1-\mathrm{p} & 1\end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{C}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1-\mathrm{p} & 0 & 0\\ \mathrm{p}-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1) Que vaut $\mathrm{B}+\mathrm{C}$?
2) On définit la matrice P :

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\mathrm{P}\in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer P^{-1}.
b) Calculer la matrice $\Delta=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ et vérifier qu'elle est diagonale.
c) Déterminer la matrice Δ^{n} pour tout entier naturel n.
d) En déduire la valeur de B^{n} pour tout entier naturel n.

3) Calculer C^2.
4) En déduire une expression de A^n en fonction des puissances de B et de C.

Partie A : Propriétés générales sur les matrices transposées

1) On a :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2) On a :

$$B=AA^T=\left(b_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Avec :

$$\forall (i,j)\in [\![1;n]\!]^2, b_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}a_{j,k}$$

On en déduit donc que :

$$Tr(B)=Tr(AA^T)=\sum_{m=1}^{n}b_{m,m}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{m,k}a_{m,k}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{m,k}\right)^2$$
$$=\left(a_{1,1}\right)^2+\left(a_{1,2}\right)^2+\cdots+\left(a_{n,n}\right)^2$$

C'est-à-dire la somme des carrées de tous les coefficients de A.
On a donc :

$$Tr(AA^T)=0\Leftrightarrow \left(a_{1,1}\right)^2+\left(a_{1,2}\right)^2+\cdots+\left(a_{n,n}\right)^2=0$$

Comme tous les termes sont positifs ou nuls, on a :

$$\forall (i,j)\in [\![1;n]\!]^2, a_{i,j}=0$$

Ainsi on a :

$$Tr(AA^T)=0\Leftrightarrow A=0_n$$

3) a) On a :

$$C=A\times B=\left(c_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Avec :

$$\forall (i,j)\in [\![1;n]\!]^2, c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$$

Ainsi on a :

$$(A\times B)^T=\left(c_{j,i}\right)_{1\leq i,j\leq n}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}b_{k,i}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

De même on a :

$$D=B^T\times A^T=\left(d_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Avec :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i}a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}b_{k,i} = c_{i,j}$$

Ainsi on a :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, (A \times B)^T = B^T \times A^T$$

b) On peut faire une récurrence !

Initialisation : $n = 0$

$$(A^0)^T = (I_n)^T = I_n = (A^T)^0$$

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(\mathrm{n})$. On a alors :

$$(A^n)^T = (A^T)^n$$

On a donc :

$$(A^{n+1})^T = (A^n \times A)^T = A^T \times (A^n)^T = A^T \times (A^T)^n = (A^T)^{n+1}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Partie B : Calcul de A^n par récurrence

1) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p^2 & 0 \\ p(1-p) & (p+1)(1-p) & 1 \end{pmatrix}$$

De plus on sait que $A^0 = I_3$ par convention.

2) On raisonne par récurrence. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$$

Initialisation : $n = 0$.

C'est vraie avec $a_0 = b_0 = c_0 = 0$

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(\mathrm{n})$. On a alors :

$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ pa_n + p^n(1-p) & p^{n+1} & 0 \\ pb_n + c_n(1-p) & pc_n + 1 - p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ a_{n+1} & p^{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie avec :

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p) \\ b_{n+1} = pb_n + c_n(1-p) \\ c_{n+1} = pc_n + 1 - p \end{cases}$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

3) On sait que :

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{n+1} = pc_n + 1 - p \end{cases}$$

On va calculer les premiers termes de c_n :

$$c_n = 1 - p, c_2 = p(1-p) + 1 - p = (p+1)(1-p) = 1 - p^2, c_3 = p(1-p^2) + 1 - p = 1 - p^3$$

On suppose que $c_n = 1 - p^n$. Démontrons le par récurrence.

Initialisation : $n = 0$. On a :

$$c_0 = 0 \text{ et } 1 - p^0 = 0$$

Donc la proposition est vraie pour n=0.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie que $c_n = 1 - p^n$.

On a alors :

$$c_{n+1} = pc_n + 1 - p = p(1-p^n) + 1 - p = 1 - p^{n+1}$$

Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 1 - p^n$$

4) a) On sait que :

$$a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p) \Longrightarrow a_{n+2} = pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) = pa_{n+1} + p(a_{n+1} - pa_n) = 2pa_{n+1} - p^2 a_n$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} = -2pa_{n+1} + p^2 a_n$$

b) On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - 2pr + p^2 = 0 \Leftrightarrow (r-p)^2 = 0 \Leftrightarrow r = p$$

On en déduit donc que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = (An + B)p^n$$

On sait que $a_0 = 0 = B$ et $a_1 = Ap = 1 - p$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n(1-p)p^{n-1}$$

5) a) Soit $(M, N) \in E^2$

On a alors :

$$(M \times N) \times U = M \times (N \times U) = M \times U = U$$

Donc E est stable par produit matriciel.

b) $M \in E$ si et seulement si la somme des coefficients des lignes de M vaut 1 !

c) On a :

$$T = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Il suffit de calculer :

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1-p \\ p+1-p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $T \in E$.

e) On sait que E est stable par produit matriciel et $T \in E$ donc par une récurrence immédiate, $T^n \in E$.

f) On sait que :

$$\left(\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}^T\right)^n = \left(\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}^n\right)^T = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus on sait que :

$$T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p^n + a_n + b_n = 1 \Longrightarrow b_n = 1 - p^n - a_n = 1 - p^n - n(1-p)p^{n-1} = 1 - np^{n-1} - (n-1)p^n$$

6) Il suffit de remplacer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ n(1-p)p^{n-1} & p^n & 0 \\ 1 - np^{n-1} - (n-1)p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$$

Partie C : Avec le binôme

$$B=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $B+C=A$

2) a) On peut le faire de différentes façons.

Soit $e=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On résout le système $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ -y=b \\ -x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b \\ y=-b \\ z=a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P\in GL_3(\mathbb{R})$ et :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que :

$$P\times P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

b) On a :

$$\Delta=P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Comme $\Delta\in\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \Delta^n=\begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) On peut le faire par récurrence ou réitération ! On a :

$$B=P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow B^n=(P\Delta P^{-1})^n=(P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1})\dots(P\Delta P^{-1})$$

$$=P\Delta(P-1\ P)\Delta(P-1\ P)\Delta\dots.(P^{-1}P)\Delta P^{-1}=P\Delta^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^n & p^n & 0 \\ 0 & -p^n & 0 \\ -p^n & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 1-p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix}$$

3) On a :

$$C^2=0_3$$

4) On vérifier que B *et* C commutent :

$$B\times C=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p-p^2 & 0 & 0 \\ p^2-p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C\times B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p-p^2 & 0 & 0 \\ p^2-p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc appliquer le binôme de Newton :

$$A^n = (B+C)^n = B^n + nB^{n-1}C \ (\text{car } C^k = 0_3 \ \forall k \geq 2)$$

5) On a donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 1-p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} np^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & np^{n-1} & 0 \\ n(1-p^{n-1}) & n(1-p^{n-1}) & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ n(1-p)p^{n-1} & p^n & 0 \\ 1-np^{n-1}-(n-1)p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix}$$

Problème 2 : Etude d'une fonction

Dans tout ce problème on pose :

$$f : \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

On rappelle que :

$$sh : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Partie A : Etude de f

1) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Déterminer la limite de f en 0^+.

b) Déterminer :

$$\lim_{X \to 0^+} \frac{sh(X)}{X}$$

c) En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

3) a) Montrer que :

$$\forall x > 0, \mathrm{sh}(x) < x\mathrm{ch}(x)$$

b) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Etude d'une suite

Dans toute cette partie on pose $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que l'équation :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{n}$$

Admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$. On la note u_n.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

Partie C : Une approximation de u_n en $+\infty$

Dans cette question on cherche à étudier la « vitesse de convergence de la suite (u_n). Plus précisément on souhaite montrer que :

$$\exists c \in \mathbb{R} \ telle\ que \ \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = c$$

On veut également déterminer la valeur de c.

1) a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} sh(t)dt$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0, x^2[f(x) - 1] - \frac{1}{6} = \frac{x^3}{6}\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt$$

c) En déduire que :

$$\forall x > 0, \left|x^2[f(x) - 1] - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{6x} sh\left(\frac{1}{x}\right)$$

4) En déduire :

$$\lim_n \frac{u_n}{\sqrt{n}}$$

Partie A : Etude de f

1) $x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto x, x \mapsto sh(x)$ sont trois fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ donc par **composition** f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
De plus on sait que :

$$\forall x > 0, f'(x) = sh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}ch(x)$$

2) a) On a :

$$\lim_{x\to 0^+} xsh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X - e^{-X}}{2X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{2X} = +\infty \ (par\ croissance\ comparée)$$

b) On sait que :

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{sh(X)}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{sh(X) - sh(0)}{X - 0} = sh'(0) = ch(0) = 1$$

c) On a donc:

$$\lim_{x\to+\infty} xsh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0^+} \frac{sh(X)}{X} = 1$$

3) a) On pose $\mathrm{g}: \mathrm{x} \mapsto \mathrm{sh}(\mathrm{x}) - \mathrm{xch}(\mathrm{x})$
On sait que $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \mathrm{ch}(\mathrm{x}) - \mathrm{ch}(\mathrm{x}) - \mathrm{xsh}(\mathrm{x}) = \mathrm{xsh}(\mathrm{x})$$

On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{g}'(\mathrm{x}) < 0$$

Donc g est décroissante sur $]0; +\infty[$, donc

$$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{g}(\mathrm{x}) < \mathrm{g}(0)$$

De plus $\mathrm{f}(0) = 0$. On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{g}(\mathrm{x}) < 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{sh}(\mathrm{x}) < \mathrm{xch}(\mathrm{x})$$

b) On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{sh}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) < \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) \Longrightarrow \forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{sh}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) - \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{ch}(\mathrm{x}) < 0$$

On en déduit donc que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	1

Partie B : Etude d'une suite

1) D'après la question précédente on a le tableau suivant :
Comme f est continue, strictement décroissante, elle prend toute les valeurs intermédiaires sur $]1; +\infty[$ une et une seule fois d'après le théorème de la bijection.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, u_n > 0, f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$$

2) On sait que :

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Longrightarrow f(u_n) > f(u_{n+1})$$

Comme f est décroissante sur $]0; +\infty[$ on en déduit que $u_n < u_{n+1}$

Donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

3) On suppose que (u_n) converge vers $\ell, \ell \in \mathbb{R}$.

On a alors par continuité de f :

$$\lim_n f(u_n) = f(\ell)$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

On en déduit donc que f vérifie l'équation :

$$f(\ell) = 1$$

Or on sait que :

$$\forall x > 0, f(x) > 1$$

On obtient une contradiction.

On en déduit donc que (u_n) ne converge pas vers une limite finie. Comme (u_n) est croissante, on en déduit donc que :

$\lim_n u_n = +\infty$.

Partie C : Une approximation de u_n en $+\infty$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$\mathcal{P}_n = \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} sh(t)dt\text{ "}$$

Initialisation : $n = 0$

On a :

$$sh(x) = sh(x) - sh(0) = \int_0^x ch(t)dt = [-(x-t)ch(t)]_0^x + \int_0^x (x-t)sh(t)dt = x + \int_0^x (x-t)sh(t)dt$$

De même on a :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2\times 0+1}}{(2\times 0+1)!} sh(t)dt = x + \int_0^x (x-t)sh(t)dt$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose vraie $\mathcal{P}_n$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} sh(t)dt$$

Or on a :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} sh(t)dt = \underbrace{\left[-\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} sh(t)\right]_0^x}_{=0} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} ch(t)dt$$

$$= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} ch(t)dt = \underbrace{\left[-\frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!} ch(t)\right]_0^x}_{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!} sh(t)dt$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!} sh(t)dt$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

b) Prenons $n = 1$ dans la relation précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} sh(t)dt$$

Puis on prend $X = \frac{1}{x}$:

$$\forall x > 0, sh\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt$$

Enfin on multiplie par x :

$$\forall x > 0, f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{x}{6}\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt \Longrightarrow x^2(f(x) - 1) - \frac{1}{6} = \frac{x^3}{6}\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt$$

c) On a :

$$\forall x > 0, \left|x^2[f(x) - 1] - \frac{1}{6}\right| = \frac{x^3}{6}\left|\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt\right|$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{x}\right], 0 \leq \frac{1}{x} - t \leq \frac{1}{x} \Longrightarrow 0 \leq \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 \leq \frac{1}{x^3}$$

De plus on a sh croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{x}\right], 0 \leq sh(t) \leq sh\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi on a :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{x}\right], 0 \leq \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t) \leq \frac{1}{x^3} sh\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme l'intégrale est croissante :

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^3} sh\left(\frac{1}{x}\right) dt}_{=\frac{1}{x^4} sh\left(\frac{1}{x}\right)} \Longrightarrow \left|\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt\right| \leq \frac{1}{x^4} sh\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall x > 0, \left|x^2[f(x) - 1] - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{6x} sh\left(\frac{1}{x}\right)}$$

4) On sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} sh\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left|x^2[f(x) - 1] - \frac{1}{6}\right| = 0$$

De plus on a démontré précédemment dans la partie B que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

D'après la caractérisation séquentielle de la limite !

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2[f(u_n)-1]-\frac{1}{6}=0$$

Or on sait que :

$$f(u_n)=1+\frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n^2}{n}=\frac{1}{6}$$

Comme la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue et $u_n>0$ on a :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{6}\Longrightarrow\left(\lim_n\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{6}\Longrightarrow\lim_n\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{6}}{6}}$$