DS n°5 - PCSI
10 février 2024

Exercice 1

Dans cet exercice on cherche toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$ suivante :

$$(\mathcal{R}) : \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

On pose :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \ tel\ que\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)\}$$

1) Déterminer une fonction f de E.

2) Démontrer que :

$$\begin{cases} f \in E \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

On suppose à présent jusqu'à la fin de l'exercice que $f(0) \neq 0$.

On pose :

$$\boldsymbol{E^* = \{f \in E\ tel\ que\ f(0) \neq 0\}}$$

3) a) Démontrer que :

$$\forall f \in E^*, f(0) = 1$$

b) En déduire que :

$$f \in E^* \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$$

c) Démontrer que :

$$\forall f \in E^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall f \in E^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

$\left(\boldsymbol{Indice} : on\ pourra\ utiliser\ le\ fait\ que\ x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}, ou\ la\ continuité\ de\ f\right)$

5) Dans toute cette question on a $f \in E^*$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = [f(x)]^n$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = [f(x)]^n$$

c) En déduire que :

$$\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = [f(1)]^q$$

d) Déterminer l'ensemble E.

Problème 2 : Une puissance de matrice

Partie A : Propriétés générales sur les matrices transposées

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et n colonnes. On définit la matrice transposée de A, notée A^T, par : $A^T = (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On pose ici :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer A^T.

2) Démontrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Tr(AA^T) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$$

(On rappelle que $Tr(A)$ est la somme des coefficients diagonaux de A :

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

3) a) Démontrer que :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, (A \times B)^T = B^T \times A^T$$

b) En déduire par récurrence que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, (A^n)^T = (A^T)^n$$

Dans toute la suite de ce problème on a :

Soit $\mathrm{p} \in]0;1[$. On définit la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{p} & 0 & 0 \\ 1-\mathrm{p} & \mathrm{p} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{p} & 1 \end{pmatrix}$$

Partie B : Calcul de A^n par récurrence

1) Calculer A^2. Que vaut A^0?

2) Montrer que, pour tout entier $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, il existe trois réels $\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n}$ et $\mathrm{c_n}$ tels que :

$$\mathrm{A}^\mathrm{n} = \begin{pmatrix} \mathrm{p}^\mathrm{n} & 0 & 0 \\ \mathrm{a_n} & \mathrm{p}^\mathrm{n} & 0 \\ \mathrm{b_n} & \mathrm{c_n} & 1 \end{pmatrix}$$

On ne demande pas d'expliciter $\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n}$ et $\mathrm{c_n}$ pour le moment !

3) Déterminer la valeur de $\mathrm{c_n}$ pour tout entier naturel n.

4) a) Montrer que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{a}_{\mathrm{n}+2} = 2\mathrm{p}\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} - \mathrm{p}^2\mathrm{a_n}$$

b) En déduire la valeur de $\mathrm{a_n}$ pour tout entier naturel n.

5) On pose $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose :

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathrm{M} \times \mathrm{U} = \mathrm{U}\}$$

a) Montrer que E est stable par produit matriciel : $\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathrm{E}^2, \mathrm{M} \times \mathrm{N} \in \mathrm{E}$.

b) Caractériser les éléments de E par une propriété sur leurs lignes ou leurs colonnes.

c) On pose $\mathrm{T} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, la matrice transposée de A. Déterminer T.

d) Montrer que $\mathrm{T} \in \mathrm{E}$.

e) En déduire que $\mathrm{T}^{\mathrm{n}} \in \mathrm{E}, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

f) En déduire que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{b}_{\mathrm{n}} = 1 - \mathrm{n}\mathrm{p}^{\mathrm{n}-1} + (\mathrm{n}-1)\mathrm{p}^{\mathrm{n}}$$

6) Déterminer $\mathrm{A}^{\mathrm{n}}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

Partie C : Avec le binôme

Dans cette partie on définit les matrices :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{p} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{p} & 0 \\ 1-\mathrm{p} & 1-\mathrm{p} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\mathrm{p} & 0 & 0 \\ \mathrm{p}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Que vaut $\mathrm{B} + \mathrm{C}$?

2) On définit la matrice P :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et calculer P^{-1}.

b) Calculer la matrice $\Delta = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ et vérifier qu'elle est diagonale.

c) Déterminer la matrice Δ^{n} pour tout entier naturel n.

d) En déduire la valeur de B^{n} pour tout entier naturel n.

3) Calculer C^2.

4) En déduire une expression de A^n en fonction des puissances de B et de C.

Problème 2 : Etude d'une fonction

Dans tout ce problème on pose :

$$\mathrm{f}: \begin{cases}]0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) \end{cases}$$

On rappelle que :

$$sh : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Partie A : Etude de f

1) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $\mathrm{x} > 0$.

2) a) Déterminer la limite de f en 0^+.

b) Déterminer :

$$\lim_{X \to 0^+} \frac{sh(X)}{X}$$

c) En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

3) a) Montrer que :

$$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{sh}(\mathrm{x}) < \mathrm{xch}(\mathrm{x})$$

b) En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Etude d'une suite

Dans toute cette partie on pose $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que l'équation :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{n}$$

Admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$. On la note u_n.

2) Montrer que la suite $(\mathrm{u_n})$ est croissante.

3) Montrer que la suite $(\mathrm{u_n})$ tend vers $+\infty$ quand $\mathrm{n} \to +\infty$.

Partie C : Une approximation de u_n en $+\infty$

Dans cette question on cherche à étudier la « vitesse de convergence de la suite (u_n). Plus précisément on souhaite montrer que :

$$\exists c \in \mathbb{R}\ telle\ que\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = c$$

On veut également déterminer la valeur de c.

1) a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} sh(t)dt$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0, x^2[f(x) - 1] - \frac{1}{6} = \frac{x^3}{6} \int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - t\right)^3 sh(t)dt$$

c) En déduire que :

$$\forall x > 0, \left|x^2[f(x) - 1] - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{6x} sh\left(\frac{1}{x}\right)$$

4) En déduire :

$$\lim_{n} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$$