Chapitre 16 : Dérivation
Partie A : Dérivabilité local et global

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de ℝ et f: I → ℝ.

I) Nombre dérivée

a) Le nombre dérivé

Définition (Taux de variation) : On appelle taux de variation la fonction définie par :

$$\tau_a : \begin{cases} I\backslash\{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

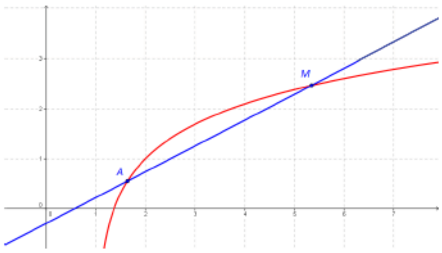
Définition (Dérivabilité et nombre dérivé) : Si $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x)$ existe, on dit que f est dérivable en a et on note :

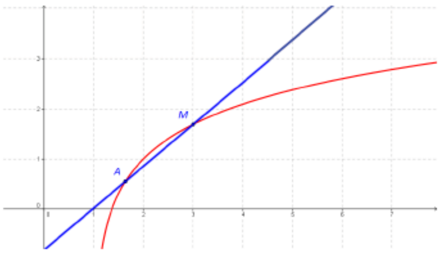
$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = f'(a)$$

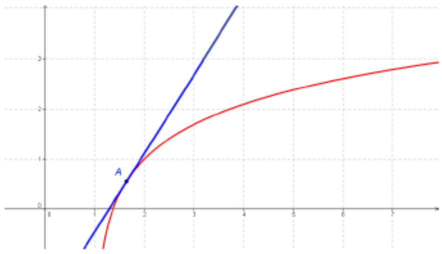
Exemple I.a.1: On pose $f(x) = x^3$. Alors pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2$

b) Interprétation géométrique

Remarque : La limite du taux de variation représente géométriquement le coefficient de la tangente au point d'abscisse x = a.







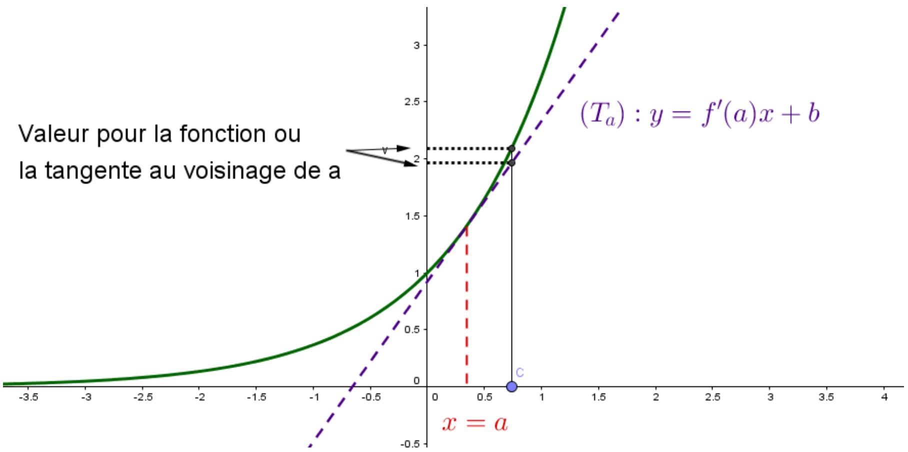
On a alors l'équation de la tangente au point d'abscisse x = a :

$$\boxed{(T_a): y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Exemple I.b.1 : Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse x = 1 de $f(x) = x^3$.

c) Développement limité à l'ordre 1 ou approximation affine

Remarque : La courbe représentative d'une fonction et sa tangente en a coïncident au point d'abscisse x = a. Mais si l'on ne « s'éloigne pas trop de a », la courbe et la tangente reste « très proche ».



Application I.c.1 : Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1{,}036}$.

Définition (développement limité d'ordre 1) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement s'il existe $(a_0; a_1) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x-a) + (x-a)\epsilon(x) \; avec \; \epsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0$$

Propriété I.c.2 : Soit f : I $\to \mathbb{R}$. Soit a $\in$ I. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement s'il existe et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x) \; avec \; \epsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0$$

Application I.c.3 : Toute fonction dérivable est continue.

ATTENTION : La réciproque est bien évidemment fausse !!!

d) Dérivée à droite et à gauche

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est dérivable à droite ou dérivable à gauche en a si : $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite ou à gauche en a. Si elles existent, on note alors ces limites $f_d'(a)$ et $f_g'(a)$, appelés dérivées à droite ou à gauche de la fonction f en a :

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Propriété I.d.1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ tel que a ne soit pas une extrémité. On a alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f \text{ est dérivable en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

Application I.d.2 : La fonction x $\mapsto$ |x| n'est pas dérivable en 0.

II) Opérations sur les fonctions dérivables

a) Enfin des démos « propres »

Propriété II.a.1 : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. On a alors :
$f+g$ est dérivable en I et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$f \times g$ est dérivable en I et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
Si g(a) $\neq$ 0 alors $\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Application II.a.2 : Déterminer la dérivée de tangente sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et th sur $\mathbb{R}$.

Propriété II.a.3 (composée de fonctions) : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$, tel que g soit dérivable en a et f en g(a). On a alors :

$$(fog)'(a) = g'(a)f'\big(g(a)\big)$$

Application II.a.4 : Déterminer la dérivée de :

$$f : x \mapsto arctan(ln(x^2+1))$$

Propriété II.a.5 (dérivée d'une réciproque) : Soient $a \in I, f : I \to J$ une fonction continue, strictement monotone sur I et dérivable en a. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$$

Application II.a.6 : Démontrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Fonctions de classe $\mathcal{D}^{\mathrm{k}}$, $\mathcal{C}^{k}$

Définition : Si *f* est dérivable en chaque point de d´un intervalle I, on dit que *f* est dérivable sur I est on note *f*´ la fonction dérivée.
On note :

$$\mathcal{D}(I,\mathbb{R}) = \mathcal{D}(I) = \{f: I \to \mathbb{R}; f\ est\ dérivable\ sur\ I\}$$

Remarque : On a vu précédemment que :

$$\mathcal{D}(\mathrm{I},\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^0(\mathrm{I};\mathbb{R})$$

ATTENTION : Il ne faut pas confondre la fonction f' et le nombre dérivée $f'(x)$.

Définition : Soit *f* une fonction définie et dérivable sur I. Il se peut que l'on ait besoin de dériver plusieurs fois la fonction *f* sur I. Si cela est possible on parle de :

- Dérivée première pour f'
- Dérivée seconde pour $\mathrm{f}'' = \mathrm{f}^{(2)}$
- Déterminer n-ième noté $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}$

On note :

$$\mathcal{D}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I},\mathbb{R}) = \mathcal{D}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I}) = \{\mathrm{f}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}; \mathrm{f\ n-fois\ dérivable\ sur\ I}\}$$

Définition : Soit $\mathrm{f} \in \mathcal{D}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}$ est continue. On dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{n}}$ de I dans $\mathbb{R}$.

Propriété II.b.1 : On a les inclusions strictes suivantes :

$$\forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathcal{C}^{\infty}(\mathrm{I}) \subsetneq \mathcal{D}^{\infty}(\mathrm{I}) \subsetneq \mathcal{C}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I}) \subsetneq \mathcal{D}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{C}^1(\mathrm{I}) \subsetneq \mathcal{D}^1(\mathrm{I}) \subsetneq \mathcal{C}^0(\mathrm{I})$$

c) Opération sur les fonctions de classe $\mathcal{D}^{\mathrm{k}}$, $\mathcal{C}^{k}$

Propriété II.c.1 : Soient $(\mathrm{f},\mathrm{g}) \in \left(\mathcal{D}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I},\mathbb{R})\right)^2$. Alors :

$$\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})\ et\ (\alpha f + \beta g)^{(n)} = \left(\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}\right)$$

Application II.c.2 : Déterminer la dérivée n-ième de $f: x \mapsto \ln(x^2 + x - 2)$ sur $]1;+\infty[$.

Propriété II.c.3 (La formule de Leibniz) : Soient $(\mathrm{f},\mathrm{g}) \in \left(\mathcal{D}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I},\mathbb{R})\right)^2$. Alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Application II.c.4 : On pose :

$$\mathrm{f}:\ \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}^2\mathrm{e}^{-5\mathrm{x}}$$

Déterminer la dérivée n-ième de *f* sur $\mathbb{R}$.