Chapitre 16 : Dérivation
Partie B : Propriétés des fonctions dérivables

I) Théorème de Rolle

a) Extrema locaux

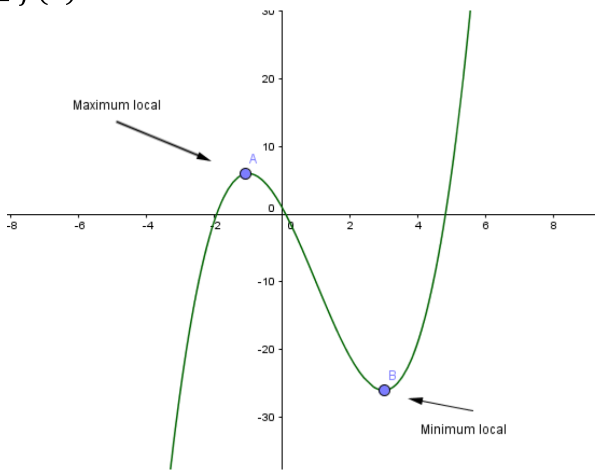
Définition : Soit f : I → ℝ. On dit que f admet un maximum local en a s'il existe $\delta > 0$ et a ∈ I tel que :

$$\forall x \in]a-\delta; a+\delta[\cap I, f(x) \leq f(a)$$

De même on dit que f admet un minimum local en a s'il existe $\delta > 0$ et a ∈ I tel que :

$$\forall x \in]a-\delta; a+\delta[\cap I, f(x) \geq f(a)$$

Exemple I.a.1 : Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ définie sur ℝ admet un maximum local et un minimum local.



Propriété I.a.2 (condition nécessaire à l'existence d'un extremum local) : Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathring{\mathrm{I}}$. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque : La condition est nécessaire mais pas suffisante. Pour déterminer les extrema locaux de f, on peut étudier les points intérieurs à D_f qui annulent la dérivée (avec le tableau de variation par exemple) puis les points à la frontière de I.

Exemple I.a.3 : Etudier les extrema de $f : x \mapsto (x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}}$

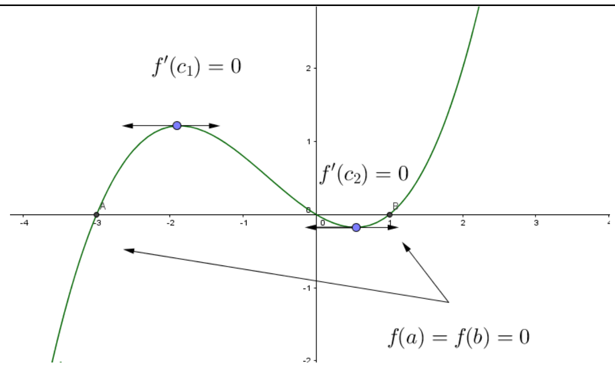
b) Théorème de Rolle

Propriété I.b.1 (Théorème de Rolle) : Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- f est continue sur $[a; b]$
- f est dérivable sur $]a; b[$
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe c $\in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : $f'(c) = 0$ n'est pas nécessairement unique.



Application I.b.2 : Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ de classe C^3 et qui s'annule trois fois sur [a; b]. Montrer qu'il existe c $\in]a; b[$ tel que $f^{(2)}(c) = 0$.

II) Accroissements finis et fonctions lipchitziennes

a) Egalité des accroissements finis

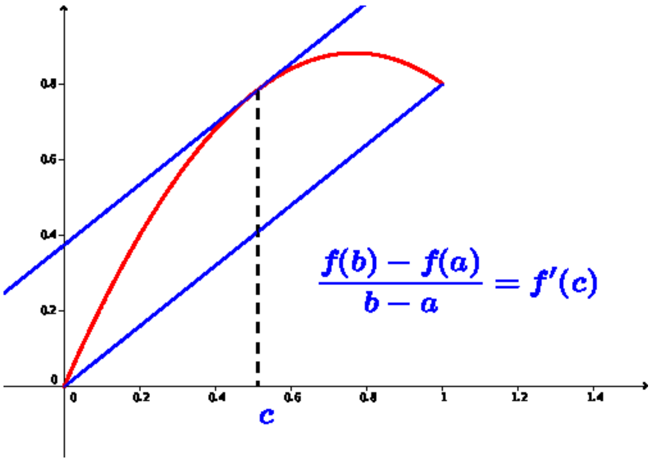
Propriété II.a.1 (Théorème des accroissements finis) : Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et f: [a; b] → ℝ. On suppose que :

- f est continue sur $[a ; b]$
- f est dérivable sur $]a; b[$.

Alors il existe c $\in]a; b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interprétation géométrique : Le **Théorème des accroissements finis** signifie que si *f* est une fonction continue sur le segment [a; b], dérivable sur]a; b[, alors il existe au moins une tangente à son graphe qui soit parallèle à la corde (AB), où $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.



Interprétation cinétique : Considérons un point mobile se déplaçant sur un axe et supposons que la position soit une fonction dérivable du temps. Ce théorème nous dit qu'il existe un instant c où la vitesse instantanée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne sur le trajet $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Application II.a.2 (recherche d'une limite) : Déterminer :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$$

Application II.a.3 (démontrer une inégalité) : Démontrer que :

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

Propriété II.a.4 (Théorème de la limite dérivée) : Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $I\setminus\{a\}$. Si f' : $I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) quand $x \to a$, alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underbrace{\to}_{x\to a} \ell$$

Application II.a.5 **:** On pose f définie sur $]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$. Montrer que f peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque : Ainsi si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

b) Monotonie

Proposition II.b.1 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On a alors :
_ f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ sur I.
_ f est croissante (resp décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp ≤ 0) sur I.

Application II.b.2 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Remarque : On peut avoir un réel c tel que $f'(c) = 0$ et avoir une fonction strictement croissante. Il faut juste qu'il existe un voisinage autour de c où f' ne s'annule pas.

c) Inégalité des accroissements finis

Propriété II.c.1 (Inégalité des accroissements finis) : Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- f est continue sur $[a; b]$
- f est dérivable sur $]a; b[$
- $\exists (m; M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$

On a alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Application II.c.2 : Démontrer que :

$$\forall x > 0, e^x - 1 \leq xe^x$$

d) Fonctions lipchitziennes

Définition : Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dite lipchitzienne sur I s'il existe un nombre $k \geq 0$, tel que :

$$\forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$$

On dira que *f* est k-lipchitzienne sur I.

Exemple II.d.1 : Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 1-lipchitiziennes.

Exemple II.d.2 : Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipchitzienne.

Propriété II.d.3 : Les fonctions k-lipchitziennes sont continues sur I.

Propriété II.d.4 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- f est continue sur I
- f est dérivable sur I

Alors on a l'équivalence :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k \iff f \text{ est k} - \text{lipchitzienne sur I}$$

Application II.d.5 : Démontrer que la fonction cosinus est 1-lipchitzienne sur $\mathbb{R}$.

d) Applications aux suites récurrentes d'ordre 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **contractante** si elle est k-lipchitzienne, $k \in [0; 1[$.

Propriété II.d.1 (convergence des fonctions contractantes) : Soit $f: I \to I$ une fonction contractante. Si f admet un point fixe ℓ sur I, alors ce dernier est unique et toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.

Application II.d.2 : Etudier la convergence de :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e^{-u_n - 1} \end{cases}$$

e) Convexité

Remarque : Pour bien comprendre la notion de convexité, il faut d'abord connaître l'expression des coordonnées des points d'un segment $[AB]$ du plan.

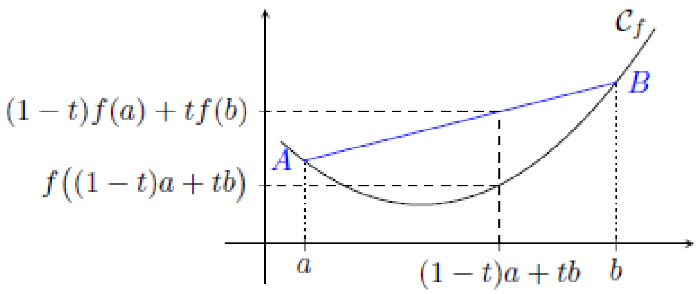
Propriété II.e.1 (écriture paramétrique d'un segment) :
On a :

$$[AB] = \{M(\boldsymbol{t}x_A + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})x_B; \boldsymbol{t}y_A + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})y_B)\ ;\ \boldsymbol{t} \in [0; 1]\}$$

Définition (fonction convexe) : On dit qu'une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si :

$$\forall (a; b) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$$

Remarque : On a alors l'interprétation géométrique suivante :



Exemple II.e.2 : Montrer que $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition II.e.3 (Inégalité des trois pentes) : Soit une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ convexe sur I et $(a, b) \in I^2$ vérifiant $a < b$. On a :

$$\forall x \in]a; b[, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Proposition II.e.4 (Convexité et dérivées) : Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a alors :
1) f est convexe si et seulement si f' est croissante.
2) Si f est deux fois dérivable, f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$
3) Si f est deux fois dérivable, on dit que a est un point d'inflexion si $f''(a) = 0$ et $f''(x)$ change de signe en a.

Proposition II.e.5 (convexité et tangentes) : Soient $a \in I$ et une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ convexe sur I, dérivable en a. On a alors :

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

Application II.e.6 : Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ 2) $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$

III) Les fonctions à valeurs complexes

Définition : Soit $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en un point $\mathrm{a} \in \mathrm{I}$ si $\frac{\mathrm{f(x)-f(a)}}{\mathrm{x-a}}$ admet une limite quand $\mathrm{x} \to \mathrm{a}$. On appelle alors dérivée de f en a et on note $\mathrm{f}'(\mathrm{a})$ cette limite.
De même on dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Propriété III.1 : $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ dérivable en $\mathrm{a} \in \mathrm{I}$ si et seulement si $\Re(\mathrm{f})$ et $\Im(\mathrm{f})$ sont dérivables en a et :

$$f'(a) = \Re(f)'(a) + i\Im(f)'(a)$$

Exemple III.2 : Déterminer la fonction dérivée de $x \mapsto e^{ix}$ sur $\mathbb{R}$.

Application III.3 : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \sin(x) \end{cases}$$

Propriété III.4 (Inégalité des accroissements finis sur $\mathbb{C}$) : Soit $\mathrm{f} \in \mathrm{C}^1([\mathrm{a}; \mathrm{b}]; \mathbb{C})$. On a :

$$\exists \mathrm{M} \geq 0, \forall \mathrm{x} \in]\mathrm{a}; \mathrm{b}[, |\mathrm{f}'(\mathrm{x})| \leq \mathrm{M} \implies |\mathrm{f(b)} - \mathrm{f(a)}| \leq \mathrm{M}|\mathrm{b} - \mathrm{a}|$$

Propriété III.5 : Soit une fonction dérivable $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$:

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k \Longrightarrow f \ est \ k - lipschitizienne$$

Application III.6 : Une fonction $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ dérivable sur I telle que $f' = 0$ est constante sur I.

Voici un tableau qui récapitule les points communs et différences entre une fonction à valeur réelle et une fonction à valeurs complexes :

Ce qu'on garde :	Ce qu'on ne garde pas :
Développement limité à l'ordre 1	Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque
Dérivable $\Rightarrow$ continu	Annulation aux extrema locaux
Opérations sur les dérivées	Théorème de Rolle
Dérivées d'ordre supérieur, fonctions $\mathcal{C}^k$	Théorème des accroissements finis
Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^k$	Lien monotonie/signe de la dérivée
Inégalité des accroissements finis	Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$
Dérivée bornée $\Rightarrow$ f lipschitzienne	
Dérivée nulle $\Rightarrow$ f constante	