TD 16 : Dérivation

Partie A : Dérivabilité en un point

Exercice A.1 : Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \in [0;1] \\ ax^2 + bx + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Soit dérivable sur $]0; +\infty[$.

Exercice A.2 : Etudier la dérivabilité de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice A.3 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
b) Montrer que le prolongement est dérivable en 0 mais que la dérivée n'est pas continue.

Exercice A.4 : Etudier la dérivabilité en 0 de :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice A.5 : Déterminer les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x};\ L_2 = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}; L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$

Partie B : Opération sur les fonctions dérivées

Exercice B.1 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \end{cases}$$

1) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
2) Etudier la dérivabilité de sa réciproque.

Exercice B.2 : On pose $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$
1) Etudier le domaine de définition de f.
2) La fonction est-elle de classe C^∞ ?
3) Démontrer que f admet un unique point fixe α et déterminer un encadrement de α d'amplitude 1.
4) Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

5) Etudier la convergence de la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1 + e^{-u_n}) \end{cases}$$

Exercice B.3 : Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 + x \text{ si } x \geq 0 \\ e^x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Exercice B.4 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.
2) Montrer que si f est impaire, alors f' est paire. Que dire de la réciproque ?
3) Montrer que si f est périodique, alors f' est périodique. Que dire de la réciproque ?

Exercice B.5 : Déterminer les extrema de $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Dérivée n-ième

Exercice C.1 : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{3x} \end{cases}$$

Exercice C.2 : On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1+x)^n$$

1) Déterminer de deux manières différentes le terme dominant de $f_n^{(n)}$.
2) En déduire la valeur de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Exercice C.3 : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos^3(x) \end{cases}$$

Exercice C.4 : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \sin(x) \end{cases}$$

Partie D : Théorème de Rolle et accroissement fini

Exercice D.1 : Soient n un entier naturel et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que le polynôme $P_n(X) = X^n + aX + b$ s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice D.2 : On pose le polynôme $P_n : X \mapsto ((1-t^2)^n)^{(n)}$ est un polynôme de degré n dont toutes les racines sont réelles comprises dans [-1 ;1].

Exercice D.3 : Résoudre l'équation différentielle suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$$

Exercice D.4 : a) Montrer que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Exercice D.5 : Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercice D.6 : Montrer que :

$$\forall(x,y) \in [0;1[^2, x < y, \frac{y-x}{\sqrt{(1-x^2)}} \leq \arcsin(y) - \arcsin(x) < \frac{y-x}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

Partie E : Application aux suites $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$

Exercice E.1 : Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}\sin(u_n) \end{cases}$$

Exercice E.2 : Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{e};1\right]$$

2) Démontrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
3) Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3}. On détaillera le procédé utilisé.

Exercice E.3 : On définit :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e^{-u_n} \end{cases}$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{e};1\right]$$

2) Démontrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
3) Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3}. On détaillera le procédé utilisé.

Partie F : Convexité

Exercice F1 : Montrer que :

$$\forall(x,y) \in]1;+\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

(On pourra étudier la convexité de $x \mapsto -ln(ln(x))$)

Exercice F2 : Montrer que :

$$\forall(x,y,a,b) \in]0;+\infty[^4, xln\left(\frac{x}{a}\right) + yln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

(On pourra étudier la convexité de $x \mapsto xln(x)$)

Exercice F3 (Ingélaité de Jensen) :
1) Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que :

$$\forall(x_1,\dots,x_n) \in I^n, \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, on\ a :$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

2) En déduire que :

$$\forall(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$