Activité 17.A.1

Exercice 1 : a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$$

b) Déterminer de la même façon $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
c) On admet dans cette question la propriété suivante :
Pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme de degré n tel que $\cos(nx) = P_n(\cos(x))$.
Déterminer $P_0(X), P_1(X), P_2(X)$ et $P_3(X)$.

Exercice 2 : On pose : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $\mathrm{A}^3 - 4\mathrm{A}^2 + 5\mathrm{A}$
b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
c) Déterminer $P(X)$ un polynôme tel que $P(A) = A^{-1}$.

Exercice 3 : Soient $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ et $\left((\mathrm{a}_0, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}), (\mathrm{b}_0, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{n})\right) \in (\mathbb{R}^{\mathrm{n}+1})^2$. On pose :

$$\mathrm{P}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \mapsto \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_k x^k} \end{cases} \text{ et } \mathrm{Q}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \mapsto \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{b_k x^k} \end{cases}$$

On pose :

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{R(x)} = \mathrm{(PQ)(x)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{2\mathrm{n}} \mathrm{c_k x^k}$$

Exprimer $\mathrm{c_k}$ en fonction des coefficients $(\mathrm{a_i})_{0 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}}$ et $(\mathrm{b_i})_{0 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}}$.

Activité 17.A.1

Exercice 1 : a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$$

b) Déterminer de la même façon $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
c) On admet dans cette question la propriété suivante :
Pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme de degré n tel que $\cos(nx) = P_n(\cos(x))$.
Déterminer $P_0(X), P_1(X), P_2(X)$ et $P_3(X)$.

Exercice 2 : On pose : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $\mathrm{A}^3 - 4\mathrm{A}^2 + 5\mathrm{A}$
b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
c) Déterminer $P(X)$ un polynôme tel que $P(A) = A^{-1}$.

Exercice 3 : Soient $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ et $\left((\mathrm{a}_0, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}), (\mathrm{b}_0, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{n})\right) \in (\mathbb{R}^{\mathrm{n}+1})^2$. On pose :

$$\mathrm{P}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \mapsto \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_k x^k} \end{cases} \text{ et } \mathrm{Q}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \mapsto \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{b_k x^k} \end{cases}$$

On pose :

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{R(x)} = \mathrm{(PQ)(x)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{2\mathrm{n}} \mathrm{c_k x^k}$$

Exprimer $\mathrm{c_k}$ en fonction des coefficients $(\mathrm{a_i})_{0 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}}$ et $(\mathrm{b_i})_{0 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}}$.