# Chapitre 17 : Polynômes
# Partie A : Présentation

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

### a) Un ensemble nul à partir d'un certain rang

Remarque : Jusqu'ici nous avons surtout rencontré des polynômes dans le cadre de fonctions d'une variable réelle. Mais comme sur les matrices, on peut définir un cadre plus général pour les polynômes : dès qu'il est possible de définir les puissances entières d'un élément et des combinaisons linéaires, nous pouvons alors parler de polynômes !

**Définition** : Dans tout ce chapitre, nous introduisons $X$, appelé l'indéterminée.

- On définit ainsi les puissances $X^k$, les monômes, avec la convention $X^0 = 1$, où 1 représente l'élément neutre pour la multiplication ($X^0 = I_n \; si \; X \in M_n(\mathbb{R}) \; par \; exemple$).
- Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \, , (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$$

On dit que les $p_0, \dots, p_n$ sont les coefficients du polynôme. Par convention, $\forall k \geq n+1, p_k = 0$
Ainsi $P$ est une combinaison linéaire de monômes.

- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

**Remarque** : On a :

- Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux :

$$\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \text{ et } \mathrm{Q(X)} = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k \iff \forall \mathrm{k} \in \mathbb{N}, \mathrm{p_k} = \mathrm{q_k}$$

- En particulier on a le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ :

$$\mathrm{P} = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{p_n} = 0$$

**Définition (opérations sur les polynômes)** : On pose :

$$\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \text{ et } \mathrm{Q(X)} = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k$$

deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda P + \mu Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda p_k + \mu q_k) X^k$$

**Propriété I.a.1** : P + Q et λP sont encore des polynômes.

### b) Initiation au produit de Cauchy

**Définition** : On pose :

$$\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \text{ et } \mathrm{Q(X)} = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k$$

deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit le produit des polynômes :

$$(\mathrm{PQ})(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ tel que } \forall \mathrm{k} \in [\![0; n+m]\!], \mathrm{c_k} = \sum_{\mathrm{i+j=n}} \mathrm{p_i q_j}$$

**Propriété I.b.1** : PQ est encore un polynôme.

### c) Propriétés de $\mathbb{K}[X]$

**Propriété I.c.1** : Dans $\mathbb{K}[X]$ la somme est :

- Associative :
$$\forall (P,Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^3, (P+Q)+R = P+(Q+R)$$
- Commutative :
$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, P+Q = Q+P$$
- Admet comme élément neutre le polynôme nul :
$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], 0+P = P+0 = P$$

**Propriété I.c.2** : Dans $\mathbb{K}[X]$ le produit est :

- Associative :
$$\forall (P,Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^3, (P\times Q)\times R = P\times(Q\times R)$$
- Commutative :
$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, P\times Q = Q\times P$$
- Distributive par rapport à l'addition :
$$\forall (P,Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^3, P\times(Q+R) = P\times Q + P\times R$$
- Admet comme élément neutre le polynôme nul :
$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], 1\times P = P\times 1 = P$$
- On a :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \lambda(PQ) = (\lambda P)Q = P(\lambda Q)$$

**Définition (composée de polynôme)** : Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, avec :
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k$$
On définit alors le polynôme QoP par :
$$QoP(X) = Q\big(P(X)\big) = \sum_{i=0}^{q} q_i \left(\sum_{k=0}^{p} p_k X^k\right)^i$$

**Exemple I.d.3** : On pose $P(X) = X^2+1$ et $Q(X) = X-2$. Déterminer PoQ et QoP.

**Propriété I.d.4 (Binôme de Newton)** : Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

**Propriété I.d.5 (deuxième identité remarquable)** : Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, P^n - Q^n = (P-Q)\sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

## II) Degré d'un polynôme

### a) Le dernier terme non nul

**Définition** : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On appelle degré du polynôme P le dernier terme $p_n$ non nul. On note cela deg(P) :
$$\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} ; p_n \neq 0\}$$
Par convention :
$$\deg(0) = -\infty$$

On appelle $p_n$ le coefficient dominant de P.
Si $p_n = 1$ on dit que le polynôme est **unitaire**.

**Exemple II.a.1** : Déterminer le degré des polynômes suivants :

$$P(X) = X^2 + 6X + 1, Q(X) = 6X^7, R(X) = 7$$

**Définition (polynôme constant)** : On dit que P est un polynôme constant si $\deg(P) \leq 0$. On identifie l'ensemble des polynômes constants à $\mathbb{K}$.

**Définition** : On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degrés inférieurs ou égales à n

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leq n\}$$

**ATTENTION** : $P(X) = X^2 \in \mathbb{K}_3[X]$

**Propriété II.a.2** : Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2$. Alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

## b) Propriétés

**Propriété II.b.1 (degré de la somme, produit, composée)** : Soient $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :

(1) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

(2) Si $\deg(P) \neq \deg(Q) \Longrightarrow \deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

(3) Si $\deg(P) = \deg(Q) = n$ alors :

_ Si $a_n + b_n = 0, \deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$

_ Si $a_n + b_n \neq 0, \deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

(4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg(\lambda P) = \deg(P)$

(5) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

(6) Si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(PoQ) = \deg(P) \times \deg(Q)$

***Application II.b.2*** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de :

$$P(X) = (X^2 - 1)^n - (X^2 - 1)^n$$

***Application II.b.3*** : Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

**Propriété II.b.4** : $\mathbb{K}[X]$ est intègre :

$$PQ = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ \text{ou} \\ Q = 0 \end{cases}$$

## c) Fonction polynômiale associée à un polynôme

**Définition** : On appelle fonction polynômiale associée au polynôme $P(X) = p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n$ la fonction :

$$\tilde{P}: \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \tilde{P}(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n \end{cases}$$

On note $\mathcal{P}_{\mathbb{K}} = \{x \mapsto \tilde{P}(x); P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

**Propriété II.c.1** : On pose $\phi: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{P}_{\mathbb{K}} \\ P \mapsto \tilde{P} \end{cases}$. Alors :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$
- $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \phi(P \times Q) = \phi(P) \times \phi(Q)$
- L'application $\phi$ est surjective

**Remarque** : Pour évaluer un polynôme (ou plutôt sa fonction polynômiale !) en $x_0$, on peut simplement calculer :

$$\tilde{P}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} p_0(x_0)^k$$

Cependant cela demande beaucoup de calcul à un ordinateur (on parle de complexité d'un algorithme !). Nous allons présenter ici la méthode dites de Horner !

**Propriété II.c.2 (méthode de Horner)** : Pour évaluer le polynôme $P(X) = p_n X^n + \cdots + p_1 X + p_0$ en la valeur $x_0$, on peut faire le calcul suivant :

$$P(x_0) = a_0 + x_0\left[a_1 + x_0\left(a_2 + x_0(\ldots.)\right)\right]$$

**Exemple II.c.3** : Evaluer le polynôme $P(X) = 4X^3 - 7X^2 + 3X - 5$ pour $X = 2$ grâce à la méthode de Horner !