Chapitre 17 : Polynômes
Partie C : Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$

I) Factorisation

a) Polynômes scindés

Définition : Un polynôme P est dit scindé s'il peut être factorisé en un produit de polynômes de degré 1 :

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda) \in (\mathbb{K})^{n+1}, \text{tq } P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

Exemple I.a.1 : Montrer que $P(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

ATTENTION : Un polynôme peut être scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Application I.a.2 : Déterminer un polynôme scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Application I.a.3 : Montrer que le polynôme $X^n - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Remarque I.a.4 : P peut être scindé avec une racine multiple :

$$P(X) = X^4 - 11X^3 + 42X^2 - 68X + 40$$

b) Polynômes irréductibles

Définition : On dit qu'un polynôme P non nul est irréductible s'il ne peut pas se factoriser en produit de polynômes de degré supérieur ou égal à 1 :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X], P = AB \implies \deg(A) = 0 \text{ ou } \deg(B) = 0$$

Exemple I.b.1 : Montrer que $P(X) = X^2 + X + 7$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

Exemple I.b.2 : Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui n'est ni irréductible ni scindé sur $\mathbb{R}$.

Propriété I.b.3 : Les polynômes de degré 1 sont toujours irréductibles sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : Les polynômes irréductibles jouent sur $\mathbb{K}[X]$ le même rôle que les nombres premiers sur $\mathbb{N}$.

Application I.b.4 : Montrer qu'un polynôme de degré 3 n'est jamais irréductible.

II) Listes des polynômes irréductibles

a) D'Alembert-Gauss

Propriété II.a.1 (Théorème de Alembert-Gauss) : Tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ possède au moins une racine sur $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.

Démo : Admis

Application II.a.2 : Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Propriété II.a.3 :
1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
2. Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ se factorise de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de polynômes de degré 1 (donc irréductibles) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \exists (a_1, \dots, a_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \lambda) \in (\mathbb{K})^{2k+1}, \text{tq } P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{\alpha_i}$$

b) Et sur $\mathbb{R}$?

Propriété II.b.1 : Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
- Les polynômes de degré 1
- Les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Application II.b.2 : Factoriser le polynôme $X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Application II.b.3 : Déterminer :

$$\int_2^3 \frac{1}{x^3 - 1} dx$$

Application II.b.4 : Factoriser le polynôme $X^n - 1$ sur $\mathbb{R}$.

III) Relations coefficients-racines

a) Pour le degré 2

Propriété III.a.1 : Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$. On a alors :

$$\alpha_1, \alpha_2 \text{ racines de } P \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \\ \alpha_1 \times \alpha_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Application III.a.2 : Déterminer les deux nombres a et b réels telles que leur somme soit 3 et leur produit -28.

b) Pour des degrés supérieures

Propriété III.b.1 : Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines (distinctes ou non) :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \text{ avec } p_n \neq 0 \text{ et } P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

On a alors :

$$-\frac{p_{n-1}}{p_n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \text{ et } (-1)^n \frac{p_0}{p_n} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

Application III.b.2 : Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0 \text{ et } \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = (-1)^{n+1}$$