TD 17
Polynômes

Partie A : Degré d'un polynôme

Exercice A.1 : Déterminer tous les polynômes tels que :
$$P'(X)^2 = 4P(X)$$

Exercice A.2 : Déterminer tous les polynômes tels que :
$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$$

Exercice A.3 : Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k = (1-X^3)^n$$

Exercice A.4 : Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
$$P(0) = 1; P(1) = 0; P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4$$

Exercice A.5 : Déterminer le degré de :
$$P(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$$

Exercice A.6 : On pose :
$$\phi: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto (2X-1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P' \end{cases}$$
a) Déterminer $\deg\big(\phi(P)\big)$ en fonction de $\deg(P)$.
b) Résoudre $\phi(P) = 1$

Exercice A.7 : Déterminer tous les polynômes P tel que :
$$XP(X+1)P(X-1) = P(X^2)$$

Exercice A.8 : On considère la famille de polynômes définie par récurrence par :
$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = 2X \\ P_{n+1} = XP_n + 2X^2P_{n-1}(X) \end{cases}$$
Déterminer le coefficient dominant de P_n.

Partie B : Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice B.1 : Effectuer la division euclidienne de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :
a) $A(X) = X^3 - 1$ et $B(X) = X + 2$
b) $A(X) = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1$ et $B(X) = X^2 + iX + 1$
c) $A(X) = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$ et $B(X) = X^2 + (1-i)X + 1 + i$

Exercice B.2 : Déterminer le reste de la division euclidienne de :
$$P(X) = \big(\cos(a) + X\sin(a)\big)^n \text{ par } B(X) = X^2 + 1$$

Exercice B.3 : A quelle condition sur a, b, c réels le polynôme $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice B.4 : a) Montrer que :
$$\forall P \in \mathbb{K}[X], (P-X) | P\circ(P-X)$$

b) En déduire les solutions réels de :

$$(x^2-3x+1)^2=3x^2-8x+2$$

Exercice B.5 : Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2)=6, P'(2)=1, P''(2)=4 \text{ et } \forall n\geq 3, P^{(n)}(2)=0$$

Exercice B.6 : Effectuer la division euclidienne de $X^{2n}-X^2+1$ par X^2-X

Exercice B.7 : On pose :

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $M^2+2M-3I_3$.
2) En déduire M^n pour tout entier naturel n.
3) On pose les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1}=2u_n-2v_n+w_n \\ v_{n+1}=2u_n-3v_n+2w_n \\ w_{n+1}=-u_n+2v_n \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite de (u_n) en fonction de n.

Partie C : Racine d'un polynôme

Exercice C.1 : Montrer que $(X-1)^2$ divise $X^{2n}-X^{2n-1}-X+1$ pour tout $n\geq 1$.

Exercice C.2 : Soit n entier naturel. On pose :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$$

Montrer que toutes les racines de P sont simples.

Exercice C.3 : Soit P un polynôme non nul. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?
a) Si P est de degré impair, alors P admet une racine réelle.
b) Si P admet une racine réelle, alors P' admet une racine réelle.
c) Si P admet deux racines réelles, alors P' admet une racine réelle.
d) Si P' est scindé à racines simples, alors P est scindé à racines simples.
e) Si P est scindé à racines simples, alors P' est scindé à racines simples.
f) Si $a\in\mathbb{R}$ est racine de P de multiplicité exactement $m\geq 1$, alors a est racine de P' de multiplicité exactement $m-1$

Exercice C.4 : On pose pour tout entier naturel n :

$$L_n(X)=\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

1) Déterminer le coefficient dominant de L_n.
2) Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
3) Montrer que L_n admet n racines réelles distinctes appartenant à $]-1;1[$.

Exercice C.5 : Montrer que $X(X+1)(2X+1)$ divise $P(X)=(X+1)^{2n}-X^{2n}-2X-1$

Exercice C.6 : Déterminer les racines de $P(X)=X^4-5X^3+5X^2+5X-6$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice C.7 : Déterminer les racines de X^5+1 sur $\mathbb{C}$.

Partie D : Factorisation

Exercice D.1 : Factoriser $P(X) = X^5 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice D.2 : Décomposer en produit de polynômes irréductibles $X^6 + 1$.

Exercice D.3 : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$P_n(X) = X^{2n} - 2X\cos(\theta)X^n + 1 \text{ où } \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$$

1) Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire une factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice D.4 : Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P'|P$.

Exercice D.5 : Trouver tous les polynômes tels que :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

Partie E : Relation coefficients racines

Exercice E.1 : a) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

b) Montrer alors que toutes ses racines sont réelles, simples et dans l'intervalle [-2 ;2].

Exercice E.2 : On pose un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ (C'est-à-dire que tous les coefficients de P sont dans $\mathbb{Z}$) :

$$P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, \text{ où } \forall k \in [\![0; n-1]\!], a_k \in \mathbb{Z}$$

a) Montrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors cette racine divise a_0.
b) Les polynômes $P(X) = X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $Q(X) = X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$.

Exercice E.3 : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$$

1) Factoriser P_n sur $\mathbb{C}$.
2) En déduire que :

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$$

Exercice E.4 : Soient α, β, γ les racines de $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de :

$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}$$

Exercice E.5 : Soit n un entier naturel et theta $\in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P(X) = (X+1)^n - e^{2in\theta}$.
1) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire les valeurs de :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$