Fiche TD 16 : Dérivation

Partie A : Dérivabilité en un point

Exercice A.1 : Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \in [0;1] \\ ax^2 + bx + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Soit dérivable sur $]0;+\infty[$.

On sait que :

$$x \mapsto \sqrt{x} \in \mathcal{D}(]0;1[)$$

De même :

$$x \mapsto ax^2 + bx + 1 \ \in \mathcal{D}(]1.+\infty[)$$

On sait que f est dérivable en 1 si et seulement si :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ell$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

De même on a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2a + b$$

De même on sait qu'une fonction dérivable en 1 est continue en 1.
On doit donc aussi avoir la continuité en 1.
On sait que :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b + 1$$

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} 2a + b = \frac{1}{2} \\ a + b + 1 = 1 \end{cases}$$

On en déduit donc que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ si et seulement si = $(a;b) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Exercice A.2 : Etudier la dérivabilité de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

On peut le prouver avec le théorème des gendarmes car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, -|\sin(x)| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x)\right| \leq |\sin(x)|$$

Donc f est déjà continue, ce qui est une condition nécessaire à la continuité de f.
Il reste à voir que f est dérivable.
On calcule :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Donc on cherche :

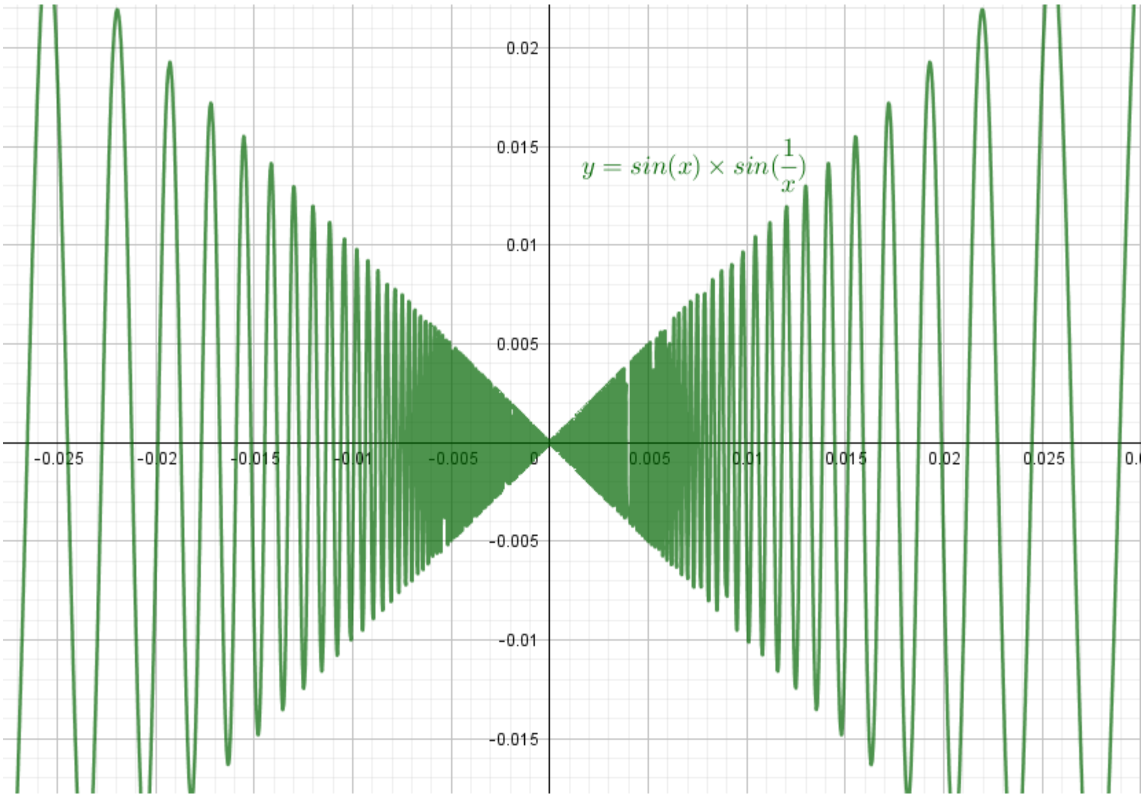
$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas de limite en 0. On peut poser

$$u_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ et } v_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

On peut le voir sur la courbe de la fonction en remarquant que les variation de f sont « chaotiques » à l'approche de 0 :



Exercice A.3 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que le prolongement est dérivable en 0 mais que la dérivée n'est pas continue.

a) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, -x^2 \leq \left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$$

On a donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

b) On calcule :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ (comme précédemment avec le théorème des gendarmes!)}$$

Ainsi f est dérivable en 0 en posant $f'(0) = 0$

On calcule à présent $f'(x)$ en dehors de 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. On peut le prouver en posant :

$$u_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ et } v_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

Donc f est dérivable en 0 mais f′ n'est pas continue.

Exercice A.4 : Etudier la dérivabilité en 0 de :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut étudier la continuité de f en 0 mais on peut aussi tout de suite étudier la dérivabilité tout de suite.
On calcule :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -\frac{1}{|\ln(|x|)|} \leq \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{|\ln(|x|)|} \leq \frac{1}{\frac{1}{|\ln(|x|)|}}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|\ln(|x|)|} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Donc f est dérivable en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice A.5 : Déterminer les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x) - 1}{x};\ L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}; L_3 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x) - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= f'(0) \\ &= \sin(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \times \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)$$
$$= 1$$

Partie B : Opération sur les fonctions dérivées

Exercice B.1 : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \end{cases}$$

1) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
2) Etudier la dérivabilité de sa réciproque.

1) Il suffit de calculer la dérivée et les limites de f.
On a :

$$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x}) + e^{-x}e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$
$$= \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} < 0$$

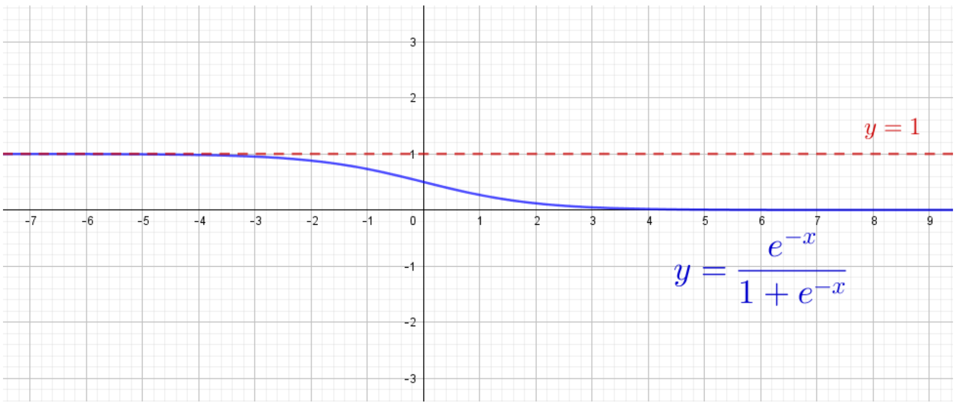
Donc f est strictement décroissante et continue donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim_{x\to-\infty} f(x) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$.
On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{x}} = 1$$

De même on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 0$$

On a la courbe suivante :



On sait que si f est dérivable et bijective et que la fonction $f'(x)$ ne s'annule pas alors f^{-1} est dérivable :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

On peut chercher f^{-1} si l'on veut.
Soit $y \in]0;1[$. On résout :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = y$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}(1-y) = y$$
$$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = \ln\left(\frac{y-1}{y}\right)$$

Exercice B.2 : On pose $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

1) Etudier le domaine de définition de f.
2) La fonction est-elle de classe C^∞ ?
3) Démontrer que f admet un unique point fixe α et déterminer un encadrement de α d'amplitude 1.
4) Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

5) Etudier la convergence de la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1 + e^{-u_n}) \end{cases}$$

1) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{-x} > 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2) On sait que :

$$x \mapsto e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$
$$x \mapsto -x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$
$$x \mapsto 1 + x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$
$$x \mapsto \ln(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$$

Par composée on en déduit donc que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

3) Il suffit d'étudier les variations de $g: x \mapsto f(x) - x$. On a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} - 1 < 0$$

On en déduit donc que g est bijective car continue et strictement monotone.
Regardons les limites de g :
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(1 + e^{-x}) - x = \ln(e^{-x}(1 + e^x)) - x = -2x + \ln(1 + e^x)$$

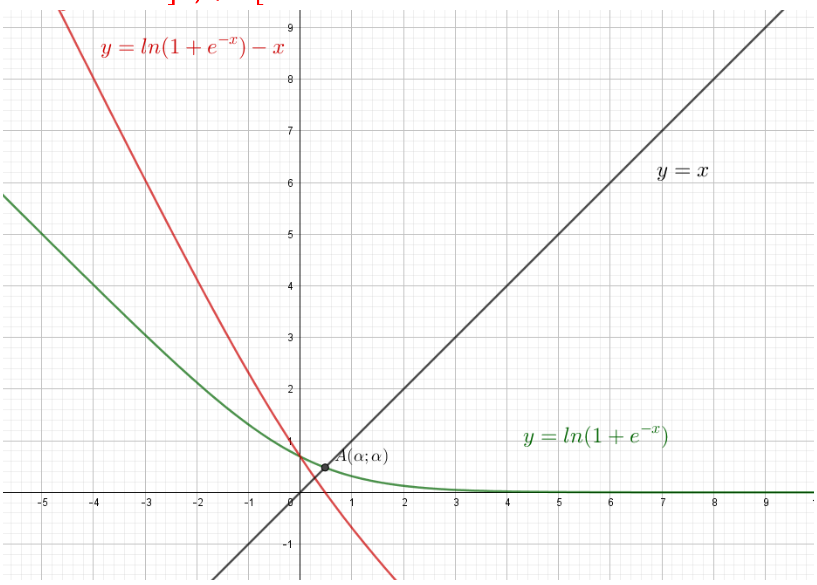
Or on sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} (1 + e^x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -2x = +\infty$$

De plus on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \text{ (par composée)} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.



On en déduit donc d'après le théorème de la bijection qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On sait que $f(0) = \ln(2) > 0$ et $f(1) = \ln(1 + e^{-1}) < \ln(e) = 1$
On en déduit donc que :

$$0 < \alpha < 1$$

4) Il suffit de voir que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f'(x)| = -f'(0) = \frac{1}{2}$$

On en déduit que f est $\frac{1}{2}-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.
On a donc :

$$\forall x \geq 0, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

5) On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc les suites convergentes définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \ln(1 + e^{-u_n}) \end{cases}$$

Convergent vers un point fixe de f, soit α.
Or on sait que :

$$\forall x \geq 0, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

De plus on sait que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ car f est strictement décroissante et

$$f(0) = \ln(2) > 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	$ln(2)$	$\searrow$	α	$\searrow$	0

On a donc par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ car } u_0 > 0$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

On en déduit donc par récurrence là aussi immédiate que :

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

On a donc :

$$0 \leq \lim_n |u_n - \alpha| \leq \lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Or on sait que :

$$\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

On a donc :

$$\lim_n |u_n - \alpha| = 0$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$\lim_n u_n = \alpha$$

Donc (u_n) converge vers α.

Exercice B.3 : Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 + x \text{ si } x \geq 0 \\ e^x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Il faut voir que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée continue.
On a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

Donc f est dérivable en 0 donc sur $\mathbb{R}$.
De plus on a :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ e^x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

On a alors :

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

On en déduit que f′ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

Cependant on a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 0$$

On en déduit donc que f n'est pas deux fois dérivable en 0 donc que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Exercice B.4 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que f est paire si et seulement si f'est impaire.
2) Montrer que si f est impaire, alors f′ est paire. Que dire de la réciproque ?
3) Montrer que si f est périodique, alors f′ est périodique. Que dire de la réciproque ?

1) C'est une équivalence.

- **1^er^ cas : $\Longrightarrow$**

Soit f une fonction dérivable paire.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x) \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f'(x)$$

Donc f′ est impaire.

- **2^ième^ cas : f′ impaire**

On pose :

$$g(x) = f(-x) - f(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) + f'(x) = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f'(-t) + f(t)\, dt = c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow [-f(-t)]_0^x + [f(t)]_0^x = c, c \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow -f(-x) + f(0) + f(x) - f(0) = c, c \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow f(-x) = f(x) + c$$

On a de plus :

$$f(0) = f(0) + c \Longrightarrow c = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$$

On en déduit donc que :
f est paire si et seulement si f' est impaire.
2) Soit f une fonction dérivable impaire.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = -f'(x) \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = f'(x)$$

Donc f′ est paire.
La réciproque est fausse. On pose pour contre-exemple : $f(x) = \sin(x) + 1$.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x)$$

Donc f′ est paire.
Cependant f n'est pas impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \sin(-x) + 1 = -\sin(x) + 1$$

On a alors :

$$\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc f n'est pas impaire.
3) Soit f une fonction T-périodique. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x + T) = f'(x)$$

Donc f' est T-périodique.
La réciproque est fausse.
Il suffit de poser :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) + x$$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc f n'est pas bornée donc f n'est pas périodique.
Cependant on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x) + 1$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + 1 = \cos(x) + 1 = f'(x)$$

Donc f′ est 2π −périodique.

Exercice B.5 : Déterminer les extrema de $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Il suffit de dériver f. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x^3 + 3x^2$$

On résout :

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x^3 + 3x^2 = 0$$
$$\Longleftrightarrow x^2(4x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Donc si f admet des extrema locaux ou globaux, c'est seulement aux points $A\big(0; f(0)\big)$ et $B\left(\frac{3}{4}\,; f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

Mais ce n'est pas une condition suffisante.
On étudie le signe de $f'(x)$
On sait de plus que :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^4 + x^3 + 1) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty$$

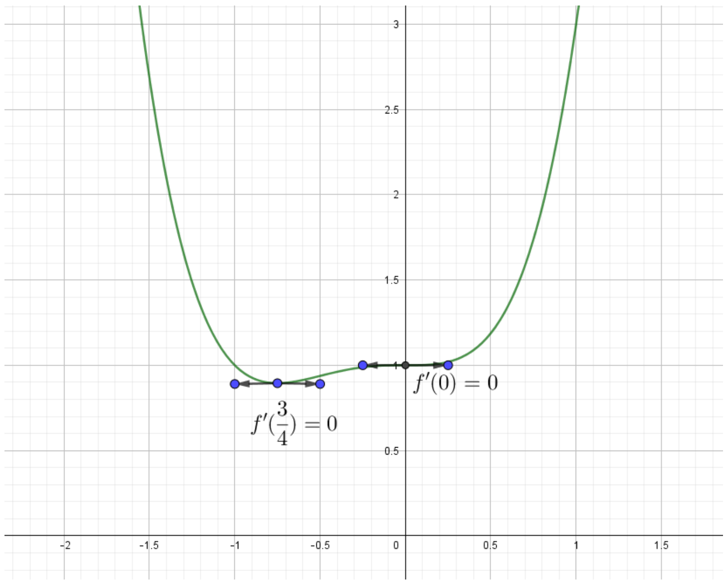
On a les variations suivantes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{445}{256}$	↗	1	↗	$+\infty$

Donc f admet un minimum global en $x = -0{,}75$ qui vaut :

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{445}{256}$$

On a la courbe de f.



Partie C : Dérivée n-ième

Exercice C.1 : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + 1)e^{3x} \end{cases}$$

On utilise la formule de Leibniz :
On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$$

On pose :

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=x^2+1\\&\Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=2x\\&\Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, g''(x)=2\\&\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},, \forall n\geq 3, g^{(n)}(x)=0\end{aligned}$$

De plus on pose :

$$\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=e^{3x}$$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}, h^{(n)}(x)=3^n e^{3x}$$

On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, f^{(n)}=(gh)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k g^{n-k}$$

$$\Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, f^{(n)}(x)=\binom{n}{0}\times 3^n(x^2+1)e^{3x}+\binom{n}{1}\times 2x3^{n-1}e^{3x}+\binom{n}{2}\times 2\times 3^{n-2}e^{3x}$$

Or on sait que :

$$\binom{n}{n}=1,\binom{n}{1}=n,\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, f^{(n)}(x)&=\left(3^n(x^2+1)+2n\times 3^{n-1}x+3^{n-2}n(n-1)\right)e^{3x}\\&=3^{n-2}(9x^2+6nx+n(n-1)+9)e^{3x}\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x)&=(x^2+1)e^{3x}\\f^{(1)}(x)&=(3x^2+2x+3)e^{3x}\\f^{(2)}(x)&=(9x^2+12x+11)e^{3x}\end{aligned}$$

On en déduit que les égalités restent vraies. On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, f^{(n)}(x)=3^{n-2}(9x^2+6nx+n(n-1)+9)e^{3x}$$

Exercice C.2 : On pose :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\forall\, x\in\mathbb{R}, f_n(x)=x^n(1+x)^n$$

1) Déterminer de deux manières différentes le terme dominant de $f_n^{(n)}$.

2) En déduire la valeur de :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

1) **Méthode 1** : Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\forall\, x\in\mathbb{R}, f_n(x)&=x^n(1+x)^n\\&=x^n\times\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+k}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2, k\leq n,\forall\, x\in\mathbb{R}, f_n^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{k!}x^k$$

Méthode 2 : On utilise la formule de Leibnitz.

On pose :

$$\begin{aligned}g_n &: x\mapsto x^n\\h_n &: x\mapsto (1+x)^n\end{aligned}$$

On sait que $(g_n,h_n)\in\left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\right)^2$ et :

$$\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2, k\leq n,\forall x\in\mathbb{R}, g_n^{(k)}=\frac{n!}{k!}x^{n-k}$$

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, k \leq n, \forall x \in \mathbb{R}, h_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}(1+x)^{n-k}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_n^{(k)}\, h_n^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}(1+x)^k$$

2) Il suffit de voir que $f_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n.
Or on sait que deux polynômes sont égaux si et seulement si les termes devant chaque monôme sont égaux.
Regardons le terme de degré n, appelé a_n.
Dans le membre de gauche on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{(2n)!}{n!}$$

Dans le membre de droite on peut voir que le polynôme $(1+x)^k$ est de degré k et le terme de degré k est 1. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \binom{2n}{n}$$

Exercice C.3 : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos^3(x) \end{cases}$$

Il faut linéariser :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos(x))^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8} \times \left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

De plus on pose :

$$g : x \mapsto \cos(x)$$

On sait que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g''(x) = -\cos(x) = \cos(x + \pi),$$

$$g^{(3)}(x) = \sin(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

On peut conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

On démontre cela par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + \frac{0 \times \pi}{2}\right)$$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : La proposition est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Exercice C.4 : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \sin(x) \end{cases}$$

C'est une question du DS 2 de la promo 2019-2020.

On raisonne par récurrence. Pour tout entier naturel n on pose la proposition P(n) suivante :

$$P(n): "\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)"$$

Initialisation : Pour n=0 :

$$2^{\frac{0}{2}} e^x \sin\left(x + 0 \times \frac{\pi}{4}\right) = e^x \sin(x) = f(x)$$

Donc P(0) est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P(n). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} e^x \left(\underbrace{\sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2}\sin\left(x + n \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} \right)$$

$$= 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \sin\left(x + (n+1) \times \frac{\pi}{4}\right)$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : P(0) est vraie et P(n) est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P(n) est toujours vraie.

Partie D : Théorème de Rolle et accroissement fini

Exercice D.1 : Soient n un entier naturel et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que le polynôme $P_n(X) = X^n + aX + b$ s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe au moins quatre racines de P_n :

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \\ P_n(x_1) = P_n(x_2) = P_n(x_3) = P_n(x_4) \end{cases}$$

P_n est de classe C^∞ donc dérivable donc on peut appliquer le théorème de Rolle.

$$\exists (x_1', x_2', x_3') \in]x_1; x_2[\times]x_2; x_3[\times]x_3; x_4[, \begin{cases} x_1' < x_2' < x_3' \\ P_n'(x_1') = P_n'(x_2') = P_n'(x_3') = 0 \end{cases}$$

On applique encore le théorème de Rolle à P_n' :

$$\exists(x_1'',x_2'') \in]x'_1;x'_2[\times]x'_2;x'_3[, \begin{cases} x_1'' < x_2'' \\ P_n''(x_1'') = P_n''(x_2'') = 0 \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n''(X) = n(n-1)X^{n-2}$$

Donc P_n'' admet seulement une racine, qui est 0.

Donc $P_n(X) = X^n + aX + b$ s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice D.2 : On pose le polynôme $P_n: X \mapsto ((1-t^2)^n)^{(n)}$ est un polynôme de degré n dont toutes les racines sont réelles comprises dans [-1 ;1].

On sait que :

$Q_n: t \mapsto (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré 2n. On le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. Les valeurs -1 et 1 sont des racines d'ordre n de Q_n, donc :

$$Q_n(1) = Q_n'(1) = \cdots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$$

On a la même chose avec -1.

De plus on sait que :

$$Q_n(1) = Q_n(-1) = 0$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]-1;1[, Q_n'(c) = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} Q_n'(c) = Q_n'(-1) = Q_n'(1) = 0 \\ -1 < c < 1 \end{cases}$$

On peut donc appliquer de nouveau de théorème de Rolle pour Q_n' :

$$\exists(c_1;c_2 \in]-1;c[\times]c;1[, Q_n''(c_1) = Q_n''(c_2) = 0$$

On réitère le procédé par récurrence. On obtient alors pour $Q_n^{(n-1)}$ n+1 racines :

$$-1 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < 1$$

On applique encore le théorème de Rolle n fois.

On obtient alors par construction n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, on a toutes les racines de $Q_n^{(n)}$.

Donc : $P_n: X \mapsto ((1-t^2)^n)^{(n)}$ est un polynôme de degré n dont toutes les racines sont réelles comprises dans [-1 ;1].

Exercice D.3 : Résoudre l'équation différentielle suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$$

On résout l'équation homogène :

$$(E_0): xy' - 2y = 0$$

On résout cela sur $]0;+\infty[$ puis sur $]-\infty;0[$.

$$(E_0): xy' - 2y = 0$$

On résout sur $]0;+\infty[$:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y_0(x) = \lambda e^{2\ln(x)} = \lambda x^2$$

On résout sur $]-\infty;0[$:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Leftrightarrow \exists\mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y_0(x) = \mu e^{2\ln(-x)} = \mu x^2$$

On doit à présent déterminer une solution particulière de l'équation

$$xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$$

On sait que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1)^3 &= (x-1)(x^3+3x^2+3x+1) \\ &= x^4 + 2x^3 - 2x - 1\end{aligned}$$

On cherche alors une solution particulière de :

$$xy' - 2y = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$

On pose $y(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
On a alors :

$$xy' - 2y = 2ax^4 + bx^3 - dx - 2e = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$

On en déduit donc que :

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$y' - \frac{2}{x}y = (x-1)(x+1)^3 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y_0(x) = \lambda e^{2\ln(x)} = \lambda x^2 + \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2}$$
$$y' - \frac{2}{x}y = (x-1)(x+1)^3 \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y_1(x) = \mu e^{2\ln(x)} = \mu x^2 + \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2}$$

Or on a :

$$\lim_{x \to 0^+} y'_0(x) = 2 = \lim_{x \to 0^-} y'_1(x)$$

On peut donc prolonger les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$y' - \frac{2}{x}y = (x-1)(x+1)^3 \Leftrightarrow \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, y(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} \text{ si } x \geq 0 \\ \mu x^2 + \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice D.4 : a) Montrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

a) On sait que :

$$\forall x > 0, \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On pose :

$$f : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

On sait que f est dérivable et :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$$

Or on sait que :

$$f(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, f(x) < 0 \Longrightarrow \ln(1+x) < x$$

On a donc :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

On peut faire de même en posant :

$$x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Ou on peut utiliser la croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt = \ln(x+1) - \ln(x)$$

De plus on sait que :

$$\forall t \in [x; x+1], \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x+1}$$

On a donc :

$$\forall x > 0, \int_{x}^{x+1} \frac{1}{t}dt \geq \int_{x}^{x+1} \frac{1}{x+1}dt$$

$$\Longrightarrow \ln(x+1) - \ln(x) \geq \frac{1}{x+1}$$

b) On a :

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow x+1 \geq \frac{1}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} \geq x$$

$$\Longrightarrow (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq 1 \geq x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\Longrightarrow e^{(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} \geq e \geq e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} \leq e \leq \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

c) On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], \left(\frac{1+k}{k}\right)^{k} \leq e \leq \left(\frac{1+k}{k}\right)^{k+1}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+k}{k}\right)^{k} = \prod_{k=1}^{n}(1+k)^k \times \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n}(1+k)^k \times \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k} \leq \prod_{k=1}^{n} e \leq \prod_{k=1}^{n}(1+k)^{k+1} \times \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{k+1}}$$

$$\Longrightarrow (1+n)^n \times \prod_{k=1}^{n-1}(1+k)^k \times \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k} \leq e^n \leq (1+n)^{n+1} \times \prod_{k=1}^{n-1}(1+k)^{k+1} \times \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{k+1}}$$

$$\Longrightarrow (1+n)^n \times \prod_{k=2}^{n}k^{k-1} \times \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k} \leq e^n \leq (1+n)^{n+1} \times \prod_{k=2}^{n}k^{k} \times \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{k+1}}$$

$$\Longrightarrow (1+n)^n \times \prod_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \times \frac{1}{1^1} \leq e^n \leq (1+n)^{n+1} \times \prod_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \times \frac{1}{1^2}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Exercice D.5 : Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

On a déjà démontré à l'exercice D.5 que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

On pose :

$$x = \frac{1}{X}$$

On a donc :

$$\forall X > 0, \frac{1}{\frac{1}{X}+1} \leq \ln(1+X) \leq X$$

$$\Longrightarrow \forall X > 0, \frac{X}{X+1} \leq \ln(1+X) \leq X$$

Remarque : On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis :
On pose :

$$f : x \mapsto \ln(1+x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On sait que :

- f est continue sur $[0; x]$
- f est dérivable sur $]0; x[$

De plus on sait que :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

De plus on sait que :

$$\forall t \in [0; x], \frac{1}{1+x} \leq f'(t) \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \frac{1}{1+x}(x-0) \leq f(x) - f(0) \leq 1(x-0)$$

On a donc :

$$\forall x \geq 0, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercice D.6 : Montrer que :

$$\forall (x, y) \in [0; 1[^2, x < y, \frac{y-x}{\sqrt{(1-x^2)}} \leq \arcsin(y) - \arcsin(x) < \frac{y-x}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis :
On pose :

$$f : x \mapsto \arcsin(x)$$

Soit $(x, y) \in [0; 1[^2, x < y$. On sait que :

- f est continue sur $[x; y]$
- f est dérivable sur $]x; y[$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [0; 1[^2, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De plus on sait que :

$$\forall t \in [0; x], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x, y) \in [0; 1[^2, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq \frac{y-x}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

On a donc :

$$\forall (x, y) \in [0; 1[^2, x < y, \frac{y-x}{\sqrt{(1-x^2)}} \leq \arcsin(y) - \arcsin(x) < \frac{y-x}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

Partie E : Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice E.1 : Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}\sin(u_n) \end{cases}$$

On pose :

$$f : x \mapsto 2 + \frac{1}{2}\sin(x)$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$$

On en déduit donc que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que f est $\frac{1}{2}-$lipschitzienne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Il faut à présent montrer que f admet un point fixe.
On pose :

$$g : x \mapsto f(x) - x$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - 1 < 0$$

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme g est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R})$.
Or on sait que :

$$g(0) = 2 \text{ et } g(2\pi) = 2 - 2\pi < 0$$

On en déduit dons qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
De plus on sait que :

$$\forall u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

On en déduit donc par récurrence là aussi immédiate que :

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

On a donc :

$$0 \leq \lim_n |u_n - \alpha| \leq \lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Or on sait que :

$$\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

On a donc :

$$\lim_n |u_n - \alpha| = 0$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$\lim_n u_n = \alpha$$

Donc (u_n) converge vers α.

Exercice E.2 : Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

On remarque que :

$$\forall u_0 \in \mathbb{R}, u_1 = \cos(u_0) \in [-1;1]$$

On peut donc supposer que $u_0 \in [-1;1]$.
On sait que cos est 1-lipschitzienne car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq 1$$

Ou bien on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \int_x^y -dt \leq \int_x^y \sin(t)\,dt \leq \int_x^y dt$$

$$\Longrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left|\int_x^y \sin(t)\right| \leq \left|\int_x^y dt\right|$$

$$\Longrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\cos(y) - \cos(x)| \leq |y - x|$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [-1;1]$$

Or on sait que :

$$\forall x \in [-1;1], |\sin(x)| \leq \sin(1) < 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x,y) \in [-1;1]^2, |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)\,|x - y|$$

De plus on sait que :

$$\exists!\, \alpha \in [-1;1], \cos(\alpha) = \alpha$$

Qui se démontre avec un TVI avec la fonction $x \mapsto \cos(x) - x$
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |\cos(u_n) - \cos(\alpha)| \leq \sin(1)\,|u_n - \alpha|$$

On en déduit donc par récurrence là aussi immédiate que :

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^{n-1} |u_1 - \alpha|$$

Or on sait que :

$$\lim_n (\sin(1))^{n-1}|u_1 - \alpha| = 0 \text{ car} \sin(1) \in]-1;1[$$

On a donc :

$$\lim_n |u_n - \alpha| = 0$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$\lim_n u_n = \alpha$$

Donc (u_n) converge vers α.

Exercice E.3 : On définit :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e^{-u_n} \end{cases}$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{e};1\right]$$

2) Démontrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
3) Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3}. On détaillera le procédé utilisé.

1) On peut démontrer cela par récurrence. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = "u_n \in \left[\frac{1}{e};1\right]"$$

Initialisation : $n = 0$. $u_0 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose que :

$$\frac{1}{e} \leq u_n \leq 1$$

$$\Longrightarrow -1 \leq -u_n \leq -\frac{1}{e}$$

$$\Longrightarrow e^{-1} \leq e^{-u_n} \leq e^{-\frac{1}{e}} < 1$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{e};1\right]$$

2) On pose :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{e};1\right], f(x) = e^{-x}$$

On sait que :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{e};1\right], f'(x) = -e^{-x} < 0$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \left[\frac{1}{e};1\right], f''(x) = e^{-x} > 0$$

On en déduit donc que f' est croissante sur $\left[\frac{1}{e};1\right]$ et négative donc :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{e};1\right], |f'(x)| \leq e^{-\frac{1}{e}} < 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x,y) \in \left[\frac{1}{e};1\right]^2, |f(x) - f(y)| \leq e^{-\frac{1}{e}}|x-y|$$

A présent on pose :

$$g: x \mapsto f(x) - x$$

On sait que :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{e};1\right], g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$$

On en déduit donc que g est décroissante sur $\left[\frac{1}{e};1\right]$.

Or on a :

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} - \frac{1}{e} > 0 \text{ car } \frac{1}{e} < 1$$

De même :

$$g(1) = e^{-1} - 1 < 0 \text{ car } -1 < 0$$

Donc g est continue, strictement décroissante et change de signe.

Donc on a :

$$\exists \alpha \in \left[\frac{1}{e};1\right], g(\alpha) = 0$$

$$\Longrightarrow \exists \alpha \in \left[\frac{1}{e};1\right], f(\alpha) = \alpha$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq e^{-\frac{1}{e}}|u_n - \alpha|$$

On en déduit donc par récurrence là aussi immédiate que :

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Or on sait que :

$$\lim_n \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0 \text{ car } e^{-\frac{1}{e}} \in]-1;1[$$

On a donc :

$$\lim_n |u_n - \alpha| = 0$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$\lim_{n} u_n = \alpha$$

Donc (u_n) converge vers α.

3) Pour avoir une valeur approchée, on peut faire un programme Python avec la dichotomie pour déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} :

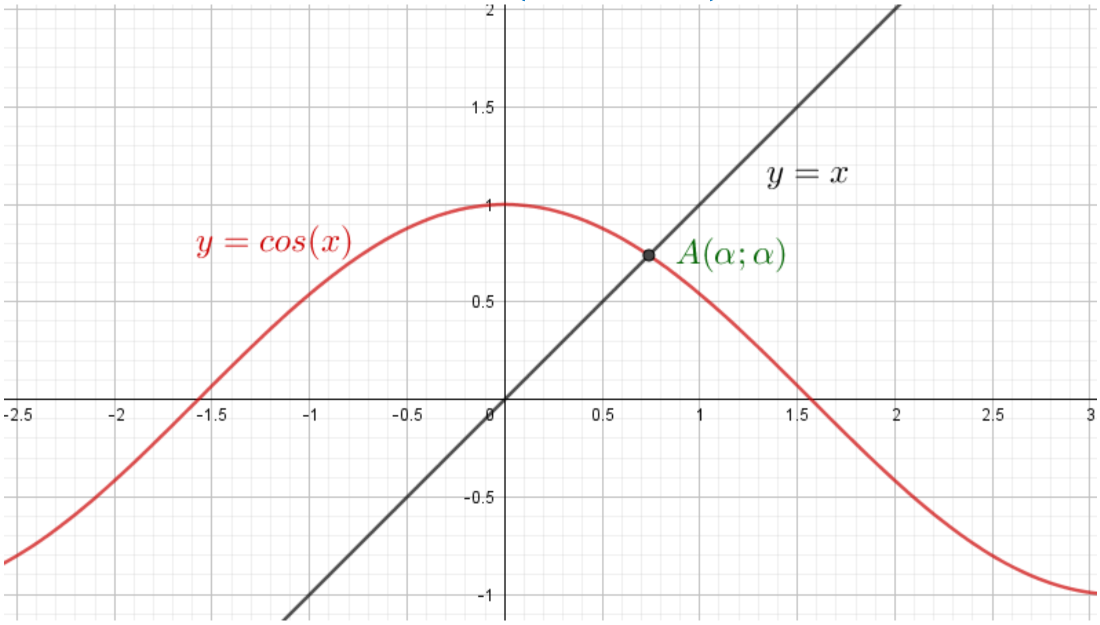
```
def exe3(epsilon):
    import math
    a=[0]
    b=[1]
    i=0
    while (b[i]-a[i])>epsilon :
        m=(a[i]+b[i])/2
        if math.cos(m)>m:
            a.append(m)
            b.append(b[i])
        else:
            a.append(a[i])
            b.append(m)
        i=i+1
    return (a[i],b[i])
```

On obtient alors :

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> exe3(10**(-4))
(0.73907470703125, 0.7391357421875)
>>>
```

On a donc :

$$\alpha \approx 0{,}739 \text{ (arrondi à } 10^{-3}\text{)}$$



Partie F : Convexité

Exercice F1 : Montrer que :

$$\forall (x,y) \in]1;+\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

(On pourra étudier la convexité de $x \mapsto -\ln(\ln(x))$)

On pose $f: x \mapsto -\ln(\ln(x))\ sur\ ]1;+\infty[$.
On a $f \in \mathcal{C}^2(]1;+\infty[)$ et :

$$\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = -\frac{1}{xln(x)} \Longrightarrow \forall x \in]1;+\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^2\ln(x)} + \frac{1}{x^2 ln^2(x)} = \frac{\ln(x)+1}{x^2 \times \ln^2(x)} > 0$$

On en déduit donc que f est convexe.
Ainsi on a :

$$\forall (x,y) \in]1;+\infty[^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \Longrightarrow -\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq -\frac{\ln(\ln(x))+\ln(\ln(x))}{2}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \frac{\ln(\ln(x))+\ln(\ln(x))}{2} \Longrightarrow \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq e^{\frac{\ln(\ln(x))+\ln(\ln(x))}{2}} \Longrightarrow \boldsymbol{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}}$$

Exercice F2 : Montrer que :

$$\forall (x,y,a,b) \in]0;+\infty[^4, xln\left(\frac{x}{a}\right) + yln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

(On pourra étudier la convexité de $x \mapsto xln(x)$)

On pose $f: x \mapsto xln(x)\ sur\ ]0;+\infty[$.
On a $f \in \mathcal{C}^2(]1;+\infty[)$ et :

$$\forall x > 0, f'(x) = \ln(x) + 1 \Longrightarrow f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

On en déduit que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
On a donc d'après l'inégalité de convexité :

$$\forall t \in [0;1], \forall (X,Y) \in]0;+\infty[^2, g(tX+(1-t)Y) \leq tg(X) + (1-t)g(Y)$$

On pose ensuite :

$$X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}\ et\ t = \frac{a}{a+b}$$

On a alors :

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{a+b} \times \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \times \frac{y}{b}\right) \ln\left(\frac{a}{a+b} \times \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \times \frac{y}{b}\right) \leq \frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b}\ln\left(\frac{y}{b}\right)}$$

On en déduit alors l'inégalité demandée ¡

Exercice F3 (Ingélaité de Jensen) :
1) Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, on\ a :$$
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

2) En déduire que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

1) Il faut faire une récurrence sur les $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.
Initialisation : On a

$$f(x_1) \leq f(x_1)$$

C'est trivial !
Remarque (pour $n = 2$, c'est l'inégalité de convexité !)
Hérédité : On suppose que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, on\ a : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

On pose :

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in I^{n+1}\ et\ (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}, on\ a : \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$$

Si $\lambda_{n+1} = 1$ alors $k \in \{1, \dots n\}, \lambda_k = 0$ alors on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

On pose ensuite $\lambda_{n+1} \neq 1$ et :

$$\forall k \in \{1, \dots n\}, \beta_k = \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}}$$

On a alors :

$$\forall k \in \{1, \dots n\}, \beta_k > 0\ et\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k = \frac{1}{1 - \lambda_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) = \frac{1}{1 - \lambda_{n+1}}(1 - \lambda_{n+1}) = 1$$

On applique alors l'inégalité de convexité avec:

$$t = \lambda_{n+1}, x = x_{n+1}\ et\ y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$$

On a :

$$f\left(\lambda_{n+1}x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right)\right) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda_{n+1}x_{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)\right) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

On obtient alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

2) **1er cas : Tous les x_k sont strictement positifs**

On sait que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \exists (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n\ tel\ que\ x_k = e^{y_k}$$

On applique l'inégalité ci-dessus avec la fonction $x \mapsto e^x$ qui est convexe et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$

On a alors :

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, e^{\frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{y_k}\right)$$

$$\Rightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n,, \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

2ième cas : Il existe au moins un des x_k nul.

On a alors :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = 0 \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

CQFD