Programme de Colle n°16
(2 au 6 février 2026)

Calcul matriciel

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Cette section a pour but de présenter une initiation au calcul matriciel, de préparer l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre et de revenir sur l'étude des systèmes linéaires. Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^{\top}$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
d) Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	

Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Définition par le taux d'accroissement.
La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\|f'\|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Fonctions convexes	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	Interprétation géométrique. L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme. Exemples d'inégalités de convexité.
f) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Questions de cours

- **TAF (Théorème des accroissements finis)** : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a\,;b]$, f est dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Décomposition des matrices carrées par somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :
$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}), \exists! \, (\mathrm{S}, \mathrm{A}) \in \mathrm{S}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}) \times \mathrm{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}) \text{ tels que } \mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$$

- Formule de dérivation pour le produit, la somme, le quotient, la composée.

- **Proposition II.e.4 (Convexité et dérivées) :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a alors :
f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Exercices du type

- Montrer que :
$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(\mathrm{AM}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BM}) \Longrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$$

- On pose :
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

Calculer A^{n} pour tout entier naturel n.

- On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$
b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{3x} \end{cases}$$

- Etudier la convergence de la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e^{-u_n - 1} \end{cases}$$

- **Exercice A.3** : On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
b) Montrer que le prolongement est dérivable en 0 mais que la dérivée n'est pas continue.

- **Exercice C.3** : Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos^3(x) \end{cases}$$

- **Exercice D.1** : Soient n un entier naturel et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que le polynôme $P_n(X) = X^n + aX + b$ s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

- **Exercice F1** : Montrer que :

$$\forall (x, y) \in]1; +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$