DM n°5 bis

Soit f une fonction définie et continue sur $[-1;1]$. On définit :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1;1]} |f(x)|$$

Vous verrez l'an prochain que ce nombre est très important.

Partie A : Echauffement

1) On pose :

$$f : x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2} \, pour \; x \in [-1;1]$$

Déterminer $\|f\|_\infty$.

2) a) Justifier l'existence de $\|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([-1;1])$.

b) Justifiez que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([-1;1]), \exists c \in [-1;1] \; tel \; que \; \|f\|_\infty = f(c)$$

c) Si $f \in \mathcal{C}^1([-1;1])$, déterminer $f'(c)$.

Nous allons à présent nous intéresser aux polynômes. On se place dans $\mathbb{R}[X]$. Dans toute la suite on confond le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec sa fonction polynomiale $\tilde{P}$ pour éviter une certaine lourdeur dans les notations.

3) a) Montrer que :

$$\|P\|_\infty = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

b) Démontrer que cela n'est plus vrai pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Partie B : Les polynômes de Tchebychev

Nous allons à présent montrer le théorème suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \Longrightarrow \|P\|_\infty \geq \frac{|a_n|}{2^{n-1}} \; avec \; a_n = CD(P)$$

Pour cela nous allons avoir besoin des polynômes de Tchebychev.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1;1], T_n(x) = \cos\big(narccos(x)\big)$$

1) Déterminer $T_0 \; et \; T_1$.

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in [-1;1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale sur $[-1;1]$.

c) Donner $T_2(X)$ et $T_3(X)$.

3) Déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

4) Déterminer la parité de T_n.

5) a) Démontrer que :

$$\forall \theta \in [0;\pi], T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

b) En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est scindé à racines simples puis déterminer les racines de T_n.

6) Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$.

Dans toute la suite on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

a) Montrer que V_n est unitaire.

b) Déterminer $\|V_n\|_\infty$.

Partie C : Minoration de $\|P\|_\infty$.

Dans cette partie on se donne $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et unitaire. On souhaite prouver que $\|P\|_\infty \geq 2^{1-n}$. Pour cela on va raisonner par l'absurde. On suppose que :

$$\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$$

1) Démontrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

2) On pose :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

a) Déterminer le signe de $(V_n - P)(x_k)$.

b) En déduire que $V_n = P$ puis conclure.

3) a) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \Longrightarrow \|P\|_\infty \geq \frac{|a_n|}{2^{n-1}} \; avec \; a_n = CD(P)$$

b) De plus déterminer tous les polynômes P_n de degré n tel que :

$$\|P_n\|_\infty = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

Partie D : Une magnifique application

Dans cette partie nous allons nous intéresser à ce que l'on appelle une interpolation. On se donne $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1;1])$ et $n+1$ antécédents $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in [-1;1]^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.
On dit que P_n est le polynôme d'interpolation de f d'ordre $n+1$ pour le $(n+1) - uplet$ $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ si :

$$\begin{cases} P_n \in \mathbb{R}_n[X] \\ \forall i \in [\![0;n]\!], P_n(a_i) = f(a_i) \end{cases}$$

On définit alors $d_{(a_0,a_1,\dots,a_n)}(P_n, f)$ la distance entre P_n et f par :

$$d_{(a_0,a_1,\dots,a_n)}(P_n, f) = \|P_n - f\|_\infty$$

Le but de cette partie étant de trouver un excellent $(n+1) - uplet$ $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ pour f, c'est-à-dire tel que $d_{(a_0,a_1,\dots,a_n)}(P_n, f)$ soit majorée par une suite qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On verra que ce $(n+1) - uplet$ est indépendant de f.

Cela est très utile en physique, notamment pour les éphémérides astronomiques où l'on a besoin de réajuster une régression par exemple.

1) On pose $f : x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2}$ pour $x \in [-1;1]$. Déterminer $d_{(-1,0,1)}(P_2, f)$.

2) Démontrer que :

$$\forall (a_0, a_1, \dots, a_n) \in [-1;1]^{n+1} \; avec \; a_0 < a_1 < \dots < a_n, \exists! \, P_n \in \mathbb{R}_n[X] \; tel \; que \; \forall i \in [\![0;n]\!], P_n(a_i) = f(a_i)$$

Dans toute la suite on pose :

$$S_{(a_0,a_1,\dots,a_n)}(X) = \prod_{k=0}^{n}(X - a_i)$$

De plus on pose $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall i \in [\![0;n]\!], P_n(a_i) = f(a_i)$$

Enfin on pose :

$$\phi_\lambda : x \mapsto f(x) - P_n(x) - \lambda S_{(a_0,a_1,\dots,a_n)}(x)$$

a) Démontrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \; tel \; que \; \exists t_\lambda \in [-1;1] \backslash \{a_0, \dots, a_n\} \; tel \; que \; \phi_\lambda(t_\lambda) = 0$$

b) Montrer que ϕ_λ s'annule $n+2$ fois sur $[-1;1]$.

c) En déduire que ${\phi_\lambda}^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1;1]$.

d) Déterminer ${\phi_\lambda}^{(n+1)}$ en fonction de $f^{(n+1)}, n \; et \; \lambda$.

e) En déduire qu'il existe $a \in [-1;1]$ tel que :

$$f(t_\lambda) - P(t_\lambda) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} S(t_\lambda)$$

3) a) En déduire que :

$$\forall x \in [-1;1], |f(x) - P(x)| \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!} \left|S_{(a_0,a_1,\dots,a_n)}(x)\right|$$

b) Pour quelles valeurs de $(a_0, \dots, a_n) \in [-1;1]^{n+1}$ la quantité $\left\|S_{(a_0,a_1,\dots,a_n)}\right\|_\infty$ est-elle minimale ?

On note $(t_0, \dots, t_n)$ ce $(n+1) - uplet$ et P le polynôme associé

c) En déduire que :

$$\|P - f\|_\infty \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!} \times \frac{1}{2^{n-1}}$$