DM n°5 sur les polynômes
Vacances de février

Cet exercice nous propose une démonstration du résultat suivant :

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On définit la suite de polynômes T_n par :

$$T_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right] \text{ où } i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

1) Calculer $T_0(X)$ et $T_1(X)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \in \mathbb{R}[X]$$

3) Déterminer le degré de T_n.

4) a) Montrer que :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$$

b) En déduire le coefficient dominant de T_n

5) a) Rappeler les solutions de $z^n = 1$ sur $\mathbb{C}$.

b) Soit $\theta \in]0;\pi[$. Démontrer que :

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

c) En déduire que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

6) Montrer que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^2\right) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

7) a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(Indice : on pourra utiliser le coefficient de T_n en X^{2n-2} et le fait que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

8) a) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

b) En déduire un encadrement de :

$$\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \; pour \; 1 \leq k \leq n$$

c) En déduire que :

$$\zeta(2) = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$