Programme de Colle n°17
(23 au 27 février 2026)

Dérivabilité

- Nombre dérivé comme taux de variation
- Développement limité d'ordre 1 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement s'il existe et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x) \; avec \; \epsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0$$

- Toute fonction dérivable est continue
- Opérations sur les fonctions, dérivées d'une réciproque, dérivée n-ième et formule de Leibniz
- Théorème de Rolle, des accroissements finis.
- Fonctions lipchitziennes, contractantes, applications aux suites numériques $u_{n+1} = f(u_n)$
- Fonctions convexes

Polynôme

- Degré d'un polynôme, coefficient dominant
- Fonction polynômiale associée à un polynôme
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, division euclidienne, formule de Taylor, racine d'un polynôme

Questions de cours

TAF (Théorème des accroissements finis) : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a\,;b]$, f est dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Propriété: Soit P $\in \mathbb{K}[X]$. On a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X-a)|P$$

Propriété (formule de Taylor pour les polynômes) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, P(X) = \sum_{k=0}^{deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Application II.b.5 : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1+x)^n$

1) Déterminer de deux manières différentes le terme dominant de $f_n^{(n)}$.
2) En déduire la valeur de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Propriété III.c.1 : Soient P $\in \mathbb{K}[X]$ et a $\in \mathbb{K}$. On a :

$$(X-a)^r|P \;\Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$$

On dit alors que a est racine de P d'ordre de multiplicité au moins r.

Proposition II.e.4 (Convexité et dérivées) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a alors :
f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Exercices du type

- Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{3x} \end{cases}$$

- Etudier la convergence de la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1+e^{-u_n}) \end{cases}$$

- Déterminer tous les polynômes tels que :

$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$$

Exercice B.7 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $M^2 + 2M - 3I_3$.
2) En déduire M^n pour tout entier naturel n.
3) On pose les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite de (u_n) en fonction de n.

Exercice A.4 : Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P(0) = 1; P(1) = 0; P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4$$

Exercice C.1 : Montrer que $(X-1)^2$ divise $X^{2n} - X^{2n-1} - X + 1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice C.2 : Soit n entier naturel. On pose :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Montrer que toutes les racines de P sont simples.