# Correction Fiche TD 17
# Polynômes

## Partie A : Degré d'un polynôme

**Exercice A.1** : Déterminer tous les polynômes tels que :

$$P'(X)^2 = 4P(X)$$

On raisonne tout d'abord sur le degré. On sait que :

$$\deg(P') = \deg(P) - 1 \text{ si } P \neq \text{cste}$$

**1^er^ cas : Si $P = \text{cste}$**

On a :

$$P = \text{cste} \Longrightarrow P' = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} P'(X)^2 = 4P(X) \\ P = \text{cste} \end{cases} \Longrightarrow P = 0$$

Donc le polynôme nul est le seul polynôme constant qui vérifie la relation.

**2^ième^ cas : $\deg(P) > 0$**

On pose : $\deg(P) = n \geq 1$.

On a donc :

$$P'(X)^2 = 4P(X) \Longrightarrow 2(n-1) = n$$
$$\Longrightarrow n = 2$$

On pose :

$$P(X) = aX^2 + bX + c \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

On en déduit donc que :

$$P'(X)^2 = 4P(X) \Longrightarrow (2aX+b)^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$$

Par identification on obtient :

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 4c \end{cases} \text{ car } a \neq 0$$

On en déduit donc que :

$$P'(X)^2 = 4P(X) \Longleftrightarrow \begin{cases} P(X) = 0 \\ \text{ou} \\ P(X) = X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4} \end{cases}$$

**Exercice A.2** : Déterminer tous les polynômes tels que :

$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$$

On raisonne là encore sur le degré.

**1^er^ cas : Si $P = \text{cste}$**

On a :

$$P = \text{cste} \Longrightarrow P'' = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} (X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0 \\ P = \text{cste} \end{cases} \Longrightarrow P = 0$$

Donc le polynôme nul est le seul polynôme constant qui vérifie la relation.

**2^ième^ cas : $\deg(P) = 1$**

On a:

$$\deg(P) = 1 \Longrightarrow P''(X) = 0 \Longrightarrow P(X) = 0 \text{ (Contradiction)}$$

Donc aucun polynôme de degré 1 n'est solution.

**3^ième cas : $\deg(P) > 1$**

On pose : $\deg(P) = n \geq 1$. On pose $a_n$ son coefficient dominant.

On a donc :

$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0 \Longrightarrow n(n-1)a_n - 6a_n = 0 \Longrightarrow n^2 - n - 6 = 0 \text{ (car } a_n \neq 0) \Longrightarrow n = 3$$

On pose $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$

On a alors :

$$\begin{aligned}(X^2+1)P''(X) - 6P(X) &= (X^2+1)(6a_3X + 2a_2) - 6(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0)\\ &= -4a_2X^2 + 6(a_3 - a_1)X + 2a_2 - 6a_0\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases}(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0\\ \deg(P) = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_2 = a_0 = 0\\ a_3 = a_1\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases}(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0\\ \deg(P) = 3\end{cases} \Leftrightarrow \exists a_3 \in \mathbb{C}^*, P(X) = a_3X(X^2+1)$$

On en déduit donc que :

$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0 \Leftrightarrow \exists a_3 \in \mathbb{C}, P(X) = a_3X(X^2+1)$$

**Exercice A.3** : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k = (1-X^3)^n$$

Il suffit de voir que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k &=, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} 3^{n-k} (1-X)^{3n-2(n-k)} X^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (1-X)^{n+2k} X^{n-k}\\ &= (1-X)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (1-X)^{2k} X^{n-k}\\ &= (1-X)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3X)^{n-k} ((1-X)^2)^k\\ &= (1-X)^n((1-X)^2 + 3X)^n\\ &= \left((1-X)(1+X+X^2)\right)^n\\ &= (1-X^3)^n\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k = (1-X^3)^n$$

**Exercice A.4** : Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P(0) = 1; P(1) = 0; P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4$$

On voit que l'on peut déjà factoriser P par (X-1) :

$$P(X) = (X-1)Q(X) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

On a donc :

$$Q(X) = aX^2 + bX + c$$

De plus on a :

$$P(0) = -Q(0) = -c = 1 \Longrightarrow c = -1$$

De plus on a :

$$P(2) = Q(2) = 4a + 2b - 1 = 4 \Longrightarrow 4a + 2b = 5$$

Enfin on a :

$$P(-1) = -2Q(-1) = -2(a - b - 1) = -2$$

On a donc :

$$a - b = 2$$

On en déduit donc que :

$$Q(X) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - 1$$

On a donc :

$$P(X) = (X-1)\left(\frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - 1\right)$$

**Exercice A.5** : Déterminer le degré de :

$$P(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$$

Il suffit d'utiliser le binôme de Newton :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k} - 2X^{2n}$$

Si $n \leq 1, P(X) = 0$
Si $n \geq 2$, on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^{2k}\left(1 + (-1)^{n-k}\right) = 2X^{2n-4} + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} X^{2k}\left(1 + (-1)^{n-k}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\deg((X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n) = \begin{cases} -\infty \text{si } n \leq 1 \\ 2n-4 \text{ sinon} \end{cases}$$

**Exercice A.6** : On pose :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto (2X-1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P' \end{cases}$$

a) Déterminer $\deg\big(\phi(P)\big)$ en fonction de $\deg(P)$.
b) Résoudre $\phi(P) = 1$

Il faut distinguer des cas !
**1er cas : $\mathbf{P = 0} \Longrightarrow$** $\Phi(P) = 0$ donc $\deg\big(\phi(P)\big) = \deg(P) = -\infty$
**2ième cas : Si $\mathbf{deg(P) = 2}$**
On a alors :

$$P(X) = aX^2 + bX + c, a \neq 0$$

On a donc :

$$P'(X) = 2aX + b$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Phi(aX^2+bX+c) &= (2X-1)(aX^2+bX+c) - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)(2aX+b) \\ &= X^2(-a+2b-b) + X(2c-b+a) + \left(-c + \frac{b}{2}\right) \\ &= X^2(b-a) + X(2c-b+a) + \left(\frac{b}{2} - c\right) \end{aligned}$$

On a alors plusieurs cas de figures ! Si $a \neq b, \deg\big(\phi(aX^2+bX+c)\big) = 2 = \deg(P)$
Si $a = b$ et $c = 0, \deg\big(\phi(aX^2+bX+c)\big) = 0$
Si $a = b, c \neq 0, \deg\big(\phi(aX^2+bX+c)\big) = 1$
**3ième cas : Si $\mathbf{deg(P)} \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$.**
On pose $a_n$ le coefficient dominant de P, et $n = \deg(P)$
On a donc :
$na_n$ le coefficient dominant de $P'$.
On voit que $(2X-1)P$ est de degré n+1 et de coefficient dominant $2a_n$.

De même $\left(X^2+\frac{1}{2}\right)P'$ est de degré n+1 et de coefficient dominant $na_n$.
Comme $n \neq 2$, $\Phi(P)$ est de degré n+1 et de coefficient dominant $(2-n)a_n$.
Ainsi on peut dire que :

$$\deg\big(\mathrm{Phi}(P)\big) = \begin{cases} -\infty \text{ si } P = 0 \\ \deg(P)+1 \text{ si } \deg(P) \neq 2 \\ k \text{ avec } k \in \{0;1\} \text{ sinon} \end{cases}$$

b) On voit que $\Phi(P) = 1 \Longrightarrow \deg(P) = 2$ d'après la question précédente.
On pose :

$$P(X) = aX^2 + bX + c \text{ avec } a \neq 0$$

On sait que $a \neq b \Longrightarrow \deg\big(\Phi(P)\big) = 2$. Donc $a = b$.
$c \neq 0 \Longrightarrow \deg\big(\Phi(P)\big) = 1$.
On a donc $c = 0$.
On a de plus :

$$\Phi(aX^2 + aX) = \frac{a}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\Phi(P) = 1 \Leftrightarrow P(X) = 2X^2 + 2X$$

**Exercice A.7** : Déterminer tous les polynômes P tel que :

$$XP(X+1)P(X-1) = P(X^2)$$

**1^er cas** : $P = 0$ fonctionne !
**2^ième cas : $P \neq 0$**. On pose $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$.
On a donc :

$$\deg\big(XP(X+1)P(X-1)\big) = 2n+1 \text{ et } \deg\big(P(X^2)\big) = 2n$$

Donc la relation est impossible !

On en déduit donc que :

$$XP(X+1)P(X-1) = P(X^2) \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

**Exercice A.8** : On considère la famille de polynômes définie par récurrence par :

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = 2X \\ P_{n+1}(X) = XP_n(X) + 2X^2P_{n-1}(X) \end{cases}$$

Déterminer le coefficient dominant de $P_n$.

Il suffit de voir que :

$$P_0(X) = 1 = 2^0, P_1(X) = 2X = 2^1X, P_2(X) = 4X^2 = 2^2X^2, P_3(X) = 8X^3 = 2^3X^3$$

On peut alors poser la proposition $Q_n$ suivante :

$$Q_n : P_n(X) = 2^nX^n$$

**ATTENTION** : Il faut faire une récurrence double !

**Initialisation** : $Q_0$ et $Q_1$ sont vraies !
**Hérédité** : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraies $Q_n$ et $Q_{n+1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(X) &= XP_{n+1}(X) + 2X^2P_n(X) \\ &= 2^{n+1}X^{n+2} + 2^{n+1}X^{n+2} \\ &= 2^{n+2}X^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $Q_{n+2}$ est vraies.
**Conclusion** : $Q_0$ et $Q_1$ sont vraies et si $Q_n$ et $Q_{n+1}$ sont vraies, alors $Q_{n+2}$ aussi ! D'après le principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = 2^nX^n$$

Ainsi le coefficient dominant est $2^n$.

## Partie B : Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

**Exercice B.1** : Effectuer la division euclidienne de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :
a) $A(X) = X^3 - 1$ et $B(X) = X + 2$
b) $A(X) = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1$ et $B(X) = X^2 + iX + 1$
c) $A(X) = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$ et $B(X) = X^2 + (1 - i)X + 1 + i$

a) On a :

$$X^3 - 1 = (X + 2)(X^2 - 2X + 4) - 9$$

b) On a :

$$X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1 = (X^2 + iX + 1)\big(X^2 + (-1 - i)\big) + iX + 2 + i$$

c) On a :

$$X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2 = (X^2 + (1 - i)X + 1 + i)\big(X^2 + (1 + i)X + (1 - i)\big)$$

**Exercice B.2** : Déterminer le reste de la division euclidienne de :

$$P(X) = \big(\cos(a) + X\sin(a)\big)^n \text{ par } B(X) = X^2 + 1$$

On sait que le reste de la division euclidienne de P par B est de degré inférieur ou égal à 1. On pose :

$$R_n(X) = a_nX + b_n$$

Le but est donc de déterminer $a_n$ et $b_n$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \big(\cos(a) + X\sin(a)\big)^n = (X^2 + 1)Q_n(X) + a_nX + b_n$$

On pose $X = i$. On a alors :

$$\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n = e^{ina} = a_ni + b_n$$

De même pour $X = -i$ on a :

$$\big(\cos(a) - i\sin(a)\big)^n = e^{-ina} = -a_ni + b_n$$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} e^{ina} = a_ni + b_n \\ e^{-ina} = -a_ni + b_n \end{cases}$$

On a donc :

$$2b_n = e^{ina} + e^{-ina} \Longrightarrow b_n = \cos(na)$$

On en déduit alors que :

$$a_n = \sin(na)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \big(\cos(a) + X\sin(a)\big)^n = (X^2 + 1)Q_n(X) + \sin(na)\,X + \cos(na)$$

**Exercice B.3** : A quelle condition sur $a, b, c$ réels le polynôme $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ ?

On doit factoriser $X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{C}$ :

$$X^2 + X + 1 = \left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)$$

Pour plus de commodité on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
On en déduit donc que :
$P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si $P(j) = 0 = P(\bar{j})$.
On sait que :

$$\begin{aligned} P(j) &= j^4 + aj^2 + bj + c = 0 \\ &\Longrightarrow aj^2 + j(b + 1) + c = 0 \\ &\Longrightarrow -a + j(b + 1 - a) + c = 0 \end{aligned}$$

Comme $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que :

$$\Im(-a + j(b + 1 - a) + c) = \frac{(b + 1 - a)\sqrt{3}}{2} = 0$$
$$\Longrightarrow b + 1 = a$$

De plus on sait que :

$$\Re(-a + j(b + 1 - a) + c) = -a - \frac{b + 1 - a}{2} + c = 0$$
$$\Longrightarrow -a - b - 1 + 2c = 0$$
$$\Longrightarrow c = a \text{ car } b + 1 = a$$

De plus on a :
$P(\bar{j}) = 0$ est immédiat puisque a,b et c sont des réels.
On en déduit donc que :
$P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si $a = c = b + 1$.
On a alors :

$$X^4 + aX^2 + (a - 1)X + a = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + a)$$

**Exercice B.4** : a) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], (P(X) - X) | (P o(P(X)) - X)$$

b) En déduire les solutions réels de :

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2$$

a) On pose :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
P(P(X)) - X &= P(P(X)) - P(X) + P(X) - X \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k P(X)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + P(X) - X \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (P(X)^k - X^k) + P(X) - X \\
&= (P(X) - X)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} P(X)^i X^{k-1-i}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

Donc $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
b) On pose :

$$P(X) - X = 3X^2 - 8X + 2$$

On en déduit donc que :

$$P(X) = 3X^2 - 7X + 2$$

On a donc :

$$P(P(X)) = 3(3X^2 - 7X + 2)^2 - 7(3X^2 - 7X + 2) + 2$$
$$=$$

**Exercice B.5** : Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2) = 6, P'(2) = 1, P''(2) = 4 \text{ et } \forall n \geq 3, P^{(n)}(2) = 0$$

On sait que :

$$\forall n \geq 3, P^{(n)}(2) = 0$$

Supposons que :

$$P^{(3)}(X) \neq 0$$

On pose $\deg(P^{(3)}) = n$ et $a_n$ son coefficient dominant. On en déduit donc que :

$$P^{(n+3)}(X) = n!\,a_n$$

Or on sait que :

$$P^{(n+3)}(2) = n!\,a_n = 0$$

Impossible car $a_n \neq 0$ et $n! \neq 0$.
On en déduit donc que :

$$P^{(3)} = 0$$

Donc $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
On pose :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

On a alors d'après les informations de l'énoncé :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 6 \\ 4a + b = 1 \\ 2a = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 6$$

Donc $P(X) = \frac{1}{2}X^2 - X + 6$

**Exercice B.6** : Effectuer la division euclidienne de $X^{2n} - X^2 + 1$ par $X^2 - X$

On a :

$$(X^{2n} - X^2 + 1) = (X^2 - X)Q(X) + a_nX + b_n$$

Pour $X = 0$ on a :

$$1 = b_n$$

De plus pour $X = 1$ on a :

$$1 = a_n + b_n$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} (X^{2n} - X^2 + 1) &= (X^2 - X)Q(X) + 1 \\ \Longrightarrow X^{2n} - X^2 &= (X^2 - X)Q(X) \\ \Longrightarrow X^{2n-1} - X &= (X - 1)Q(X) \text{ par intégrité de } \mathbb{R}[X] \\ \Longrightarrow X(X^{2n-2} - 1) &= (X - 1)Q(X) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, X^{2n-2} - 1 = (X - 1)\sum_{k=0}^{2n-3} X^k$$

On en déduit donc que :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{2n-3} X^{k+1}$$

$$\Longrightarrow X^{2n} - X^2 + 1 = (X^2 - X)\left(\sum_{k=0}^{2n-3} X^{k+1}\right) + 1$$

**Exercice B.7** : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $M^2 + 2M - 3I_3$.
2) En déduire $M^n$ pour tout entier naturel n.
3) On pose les suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

Déterminer une formule explicite de $(u_n)$ en fonction de n.

1) On a :

$$M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$$

2) On cherche le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2+2X-3$.
On sait que le reste $R_n$ est de degré inférieur ou égale à 1 :

$$R_n=a_nX+b_n$$

On a donc :

$$X^n=(X^2+2X-3)Q_n(X)+a_nX+b_n$$

On sait que :

$$X^2+2X-3=(X-1)(X+3)$$

On remplace dans la division euclidienne X par 1 :

$$A=a_n+b_n$$

De même avec $X=-3$ :

$$(-3)^n=-3a_n+b_n$$

On résout alors le système :

$$\begin{cases} a_n+b_n=1 \\ -3a_n+b_n=(-3)^n \end{cases} \Longrightarrow a_n=\frac{1-(-3)^n}{4} \text{ et } b_n=\frac{3+(-3)^n}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, X^n=(X^2+2X-3)Q_n(X)+\frac{1-(-3)^n}{4}X+\frac{3+(-3)^n}{4}$$

3) On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1}=2u_n-2v_n+w_n \\ v_{n+1}=2u_n-3v_n+2w_n \\ w_{n+1}=-u_n+2v_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N}, M^n &= (M^2+2M-3I_3)Q_n(M)+\frac{1-(-3)^n}{4}M+\frac{3+(-3)^n}{4}I_3 \\ &= \frac{1-(-3)^n}{4}M+\frac{3+(-3)^n}{4}I_3 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5-(-3)^n}{4} & \frac{(-3)^n-1}{2} & \frac{1-(-3)^n}{4} \\ \frac{1-(-3)^n}{2} & (-3)^n & \frac{1-(-3)^n}{2} \\ \frac{(-3)^n-1}{4} & \frac{1-(-3)^n}{2} & \frac{3+(-3)^n}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{5-(-3)^n}{4}u_0+\frac{(-3)^n-1}{2}v_0+\frac{1-(-3)^n}{4}w_0$$

## Partie C : Racine d'un polynôme

**Exercice C.1** : Montrer que $(X-1)^2$ divise $X^{2n}-X^{2n-1}-X+1$ pour tout $n\geq 1$.

On pose :

$$P_n(X)=X^{2n}-X^{2n-1}-X+1$$

On a :

$$P_n(1)=0 \text{ et } P_n'(1)=2n-(2n-1)-1=0$$

Donc $(X-1)^2$ divise $X^{2n}-X^{2n-1}-X+1$ pour tout $n\geq 1$.

**Exercice C.2** : Soit n entier naturel. On pose :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$$

Montrer que toutes les racines de $P$ sont simples.

On raisonne par l'absurde. Supposons que P admette une racine double $\alpha \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$P(\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}=0 \text{ et } P'(\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}=0$$

On en déduit que :

$$\frac{\alpha^n}{n!}=0 \Longrightarrow \alpha=0$$

Or $P(0)=1$. Donc cela est impossible.
Ainsi $P$ n'admet pas de racine double !
Toutes les racines de P sont simples.

**Exercice C.3** : Soit $P$ un polynôme non nul à coefficient réel. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?
a) Si P est de degré impair, alors P admet une racine réelle.
b) Si P admet une racine réelle, alors P' admet une racine réelle.
c) Si P admet deux racines réelles, alors P' admet une racine réelle.
d) Si P' est scindé à racines simples, alors P est scindé à racines simples.
e) Si P est scindé à racines simples, alors P' est scindé à racines simples.
f) Si $a \in \mathbb{R}$ est racine de P de multiplicité exactement $m \geq 1$, alors a est racine de P' de multiplicité exactement $m-1$

a) VRAI ! En calculant les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de P qui sont opposées puis en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
b) FAUX ! Contre-exemple : $P(X)=X \Longrightarrow P'(X)=1$ n'admet aucune racine réelle !
c) VRAI ! Il suffit d'appliquer le théo1rème de Rolle puisque :

$$\exists(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, P(x_1)=P(x_2)=0$$

Ainsi, comme P est dérivable, on peut appliquer le théorème de Rolle :

$$\exists c\in\,]x_1,x_2[, P'(c)=0$$

Remarque : Si P admet une racine double réelle le résultat reste vrai car :

$$\exists Q\in\mathbb{R}[X], P(X)=(X-\alpha)^2Q(X)$$

On a donc :

$$P'(X)=2(X-\alpha)Q(X)+(X-\alpha)^2Q'(X)\Longrightarrow P'(\alpha)=0$$

P' admet la même racine que P !
d) FAUX !
Il suffit de prendre :

$$P(X)=X^3-X-6$$

On a donc :

$$P'(X)=3X^2-1=3\left(X-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Donc $P'$ est scindé à racine simple.
Cependant P n'est pas scindé à racine simple car :

$$P(X)=X^3-X-6=(X-2)(X^2+2X+3)$$

e) VRAI ! On pose $deg(P)=n$ et $(x_1,\dots,x_n)$ les racines de P, rangées dans l'ordre croissant :

$$x_1<x_2<\cdots<x_n$$

On a alors :

$$P(x_1)=\cdots=P(x_n)=0$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de Rolle $n-1$ fois.
On a alors $n-1$ racines simples de P'. Comme P' est de degré $n-1$, P' est scindé à racines simples !
f) VRAI ! Il suffit d'utiliser la caractérisation :

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0 \; et \; P^{(r)}(a) \neq 0$$

**Exercice C.4** : On pose pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{L_n(X)} = \frac{1}{2^n n!}((X^2-1)^n)^{(n)}$$

1) Déterminer le coefficient dominant de $\mathrm{L_n}$.
2) Calculer $\mathrm{L_n}(1)$ et $\mathrm{L_n}(-1)$.
3) Montrer que $L_n$ admet n racines réelles distinctes appartenant à $]-1;1[$.

1) On sait que :

$$(X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{2k} = 1 + nX^2 + \binom{n}{2}X^4 + \cdots + nX^{2n-2} + X^{2n}$$

$$\Longrightarrow ((X^2-1)^n)^{(n)} = \frac{d^n(X^2-1)}{dt^n} = (2n)(2n-1)\dots\big(2n-(n+1)\big)X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Or on sait que :

$$(2n)(2n-1)\dots\big(2n-(n+1)\big) = \frac{(2n)!}{n!}$$

On en déduit donc que le coefficient dominant de $\mathrm{L_n}$ est $\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.

2) On voit que :

$$(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$$

Ainsi 1 est racine d'ordre n de $(X^2-1)^n$, de même que -1.

On en déduit donc que :

$$\forall k \in [\![0;n-1]\!], P^{(k)}(1) = P^{(k)}(-1) = 0$$

On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}(X^2-1)^n &= \sum_{k=0}^{2n}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \\ &= \sum_{k=n}^{2n}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \\ &= (X-1)^n\sum_{k=n}^{2n}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-n}\end{aligned}$$

Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$,

$$(X+1)^n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-n}$$

On en déduit donc pour $X = 1$ que :

$$2^n = \frac{P^{(n)}(1)}{n!}$$

On en déduit donc que :

$$[(X^2-1)^n]^{(n)}(1) = 2^n n!$$
$$\Longrightarrow L_n(1) = 1$$

De même on a :

$$(X-1)^n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(X+1)^{k-n}$$

On a donc :

$$(-2)^n = \frac{P^{(n)}(-1)}{n!}$$
$$\Longrightarrow P^{(n)}(-1) = (-1)^n 2^n n!$$
$$\Longrightarrow L_n(-1) = (-1)^n$$

3) On pose $P_n(X) = (X^2 - 1)^{(n)}$
On montre cette propriété par récurrence.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!]\ \mathcal{P}(k) : "\exists -1 < x_1 < \cdots < x_k < 1\ \forall i \in [\![1; n]\!]\ tel\ que\ P^{(k)}(x_i) = 0"$$

**Initialisation** : Soit $n = 0$. On a alors :

$$P_n^{(1)}(X) = 2nX(X^2 - 1)^{n-1}$$

Donc la propriété est vraie car $P_n^{(1)}$ admet une racine, 0, dans l'intervalle $]-1; 1[$.
**Hérédité** : Soit $k \in [\![1, n]\!]$, fixé. On suppose vraie $P(k)$ est vraie.
On veut prouver que la propriété est vraie pour $k + 1 \leq n$. Donc $k \leq n - 1$. On sait donc deux choses :
1) D'après la question précédente :

$$\forall k \leq n - 1, P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$$

2) D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\exists -1 < x_1 < \cdots < x_k < 1\ \forall i \in [\![1; n]\!]\ tel\ que\ P^{(k)}(x_i) = 0$$

On a donc $k + 2$ racines disctintes de $P_n^{(k)}$ :
On applique alors $k + 1$ fois le théorème de Rolle et on obtient les $k + 1$ racines de $P_n^{(k+1)}$ comprises entre 0 et 1.
Donc la propriété est héréditaire.
**Conclusion** : On conclut d'après le principe de récurrence.
On en déduit donc que :
$P_n^{(n)}$ admet au moins n racines distinctes dans l'intervalle $]-1; 1[$.
De plus on sait que :

$$deg(P_n) = 2n$$

On en déduit donc que $deg(L_n) = n$.
On en déduit donc que :
$L_n$ admet n racines réelles distinctes appartenant à $]-1; 1[$.

**Exercice C.5** : Montrer que $X(X + 1)(2X + 1)$ divise $P(X) = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$

Il suffit de voir que $0, -1\ et\ -\frac{1}{2}$ sont racines de P.

**Exercice C.6** : Déterminer les racines de $P(X) = X^4 - 5X^3 + 5X^2 + 5X - 6\ sur\ \mathbb{C}$.

On cherche une racine évidente :

$$P(1) = 0$$

On peut donc factoriser par $X - 1$ :

$$P(X) = (X - 1)(X^3 - 4X^2 + X + 6)$$

On pose :

$$Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$$

On a :

$$Q(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$$

On peut donc factoriser par $X + 1$ :

$$Q(X) = (X + 1)(X^2 - 5X + 6)$$

Il reste à factoriser :

$$X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

On a donc :

$$P(X) = X^4 - 5X^3 + 5X^2 + 5X - 6 = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X - 3)$$

**Exercice C.7** : Déterminer les racines de $X^5 + 1$ sur $\mathbb{C}$.

On résout :

$$X^5 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow X^5 = -1$$

$$\Leftrightarrow X^5 = (-1)^5$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{X}{-1}\right)^5 = 1$$
$$\Leftrightarrow -X = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in [\![0;4]\!]$$

On en déduit donc que :

$$X = e^{i\pi\frac{2k+5}{5}}, k \in [\![0;4]\!]$$

## Partie D : Factorisation

**Exercice D.1** : Factoriser $P(X) = X^5 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$.

On a :

$$P(X) = X^5 + X = X(X^4 + 1) = X\prod_{k=0}^{3}\left(X - e^{i\pi\frac{2k+1}{4}}\right)$$

**Remarque** : On résout comme précédemment $X^4 + 1 = 0$ !

**Exercice D.2** : Décomposer en produit de polynômes irréductibles $X^6 + 1$.

L'énoncé ne nous dit pas si nous devons factoriser $X^6 + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$ ou sur $\mathbb{C}[X]$. Nous allons donc faire les deux !

**1er cas : Sur $\mathbb{C}[X]$**

On résout :

$$X^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow X^6 = -1$$
$$\Leftrightarrow X^6 = \left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^6$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{X}{e^{\frac{i\pi}{6}}}\right)^6 = 1$$
$$\Leftrightarrow X = e^{\frac{i\pi}{6}} \times e^{\frac{2ik\pi}{6}}; k \in [\![0;5]\!]$$
$$\Leftrightarrow X = e^{i\pi\frac{2k+1}{6}}, k \in [\![0;5]\!]$$

On a donc :

$$X^6 + 1 = \prod_{k=0}^{5}\left(X - e^{i\pi\frac{2k+1}{6}}\right)$$

**2ième cas : sur $\mathbb{R}[X]$**

C'est très classique ! Il suffit de « ranger » deux par deux les racines complexes non réelles (ici toutes !) de $X^6 + 1$ afin de faire apparaître un polynôme de degré 2 à discriminant négatif !

On a :

$$\prod_{k=0}^{5}\left(X - e^{i\pi\frac{2k+1}{6}}\right) = \prod_{k=0}^{2}\left[\left(X - e^{i\pi\frac{2k+1}{6}}\right)\left(X - e^{-i\pi\frac{2k+1}{6}}\right)\right]$$
$$= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)X + 1\right)$$
$$\Rightarrow X^6 + 1 = \left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)(X^2 + 1)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)$$

**Exercice D.3** : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$P_n(X) = X^{2n} - 2X\cos(\theta)X^n + 1 \text{ où } \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$$

1) Factoriser $P_n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2) En déduire une factorisation de $P_n$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1) Il suffit de voir que :

$$P_n(X) = X^{2n} - 2Xcos(\theta)X^n + 1 = (X^n)^2 - 2\cos(\theta)(X^n) + 1$$

On peut faire le changement de variable $X^n = Y$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= Y^2 - 2\cos(\theta)\,Y + 1 \\ &= \left(Y - e^{i\theta}\right)\left(Y - e^{-i\theta}\right) \\ &= \left(X^n - e^{i\theta}\right)\left(X^n - e^{-i\theta}\right) \end{aligned}$$

Il reste à factoriser $X^n - e^{i\theta}$ :

On cherche les racines de $X^n - e^{i\theta}$ :

$$X^n = e^{i\theta} = \left(e^{\frac{i\theta}{n}}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{X}{e^{\frac{i\theta}{n}}}\right)^n = 1\ car\ \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow X = e^{\frac{i\theta}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

$$\Leftrightarrow X = e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

De même on a :

$$X^n = e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow X = e^{i\frac{2k\pi-\theta}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

On a donc :

$$X^{2n} - 2Xcos(\theta)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left[\left(X - e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}\right)\left(X - e^{i\frac{2k\pi-\theta}{n}}\right)\right]$$

2) De même que l'exercice précédent, il faut ordonner les racines complexes avec leur conjugué !

$$X^{2n} - 2Xcos(\theta)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left[\left(X - e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2k\pi+\theta}{n}}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow X^{2n} - 2Xcos(\theta)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)X + 1\right)$$

**Exercice D.4** : Déterminer les polynômes $P$ de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P'|P$.

**Remarque** : Si $deg(P) \in \{0; -\infty\}$ alors la proposition est fausse car P'=0. Ainsi pour être candidat il faut que $deg(P) \geq 1$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $deg(P) \geq 1$. Soit $\alpha$ une racine de P. Supposons que $\alpha$ ne soit pas racine de $P'$ et que $P'|P$.

On a alors :

$$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P(X) = P'(X)Q(X)\ avec\ P'(\alpha) \neq 0$$

On a alors :

$$P(\alpha) = P'(\alpha)Q(\alpha) = 0 \Longrightarrow Q(\alpha) = 0$$

On a donc :

$$Q(\alpha) = \lambda(X - \alpha)\ avec\ \lambda \neq 0$$

On en déduit donc que :

$$P(X) = P'(X)\lambda(X - \alpha)$$

On a donc :

$$P'(X) = P''(X)\lambda(X - \alpha) + \lambda P'(X)$$

On a donc :

$$P'(\alpha) = \lambda P'(\alpha) \Longrightarrow \lambda = 1\ car\ P'(\alpha) \neq 0$$

On a donc :

$$P(X) = P'(X)(X - \alpha)$$

Ce qui implique que :

$$P'(X) = P''(X)(X - \alpha) + P'(X)$$

Comme $Q \neq 0$ on en déduit donc que $P''(X) = 0$ par intégrité de $\mathbb{C}[X]$ et donc que $deg(P) = 1$.
Ainsi si P admet une racine qui n'est pas racine de P', alors le polynôme P est de degré 1, et $P'$ divise P.

A présent il reste à traiter le cas $deg(P) \geq 2$. On pose $deg(P) = n \geq 2$.
On a vu précédemment que cela implique que toutes les racines de P sont aussi racines de P'.
On pose $m$ le nombre de racines distinctes de P, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les racines de P et $r_1, \dots, r_m$ leur ordre de multiplicité successives.
On sait que :
$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont racines de P' d'ordre de multiplicité $r_1 - 1, \dots, r_m - 1$.
De plus on sait que :
$r_1 + \cdots + r_m = deg(P)$ et $(r_1 - 1) + \cdots + (r_m - 1) \leq deg(P')$
On a donc :

$$r_1 + \cdots + r_m - m \leq deg(P) - 1$$

On en déduit donc que :

$$m \leq 1$$

Comme $deg(P) \geq 2$, on en déduit donc que $m = 1$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.
Ainsi P admet une unique racine.
On pose alors :

$$P(X) = \lambda(X-\alpha)^n, n \geq 2$$

On a alors :

$$P'(X) = n\lambda(X-\alpha)^{n-1} \Longrightarrow P'(X) \times \frac{1}{n}(X-\alpha) = P'(X)Q(X) = P(X)$$

Ainsi P' divise bien P, donc la réciproque est vraie. On en déduit donc que :

$$\{P \in \mathbb{C}[X], P'|P\} = \{P \in \mathbb{C}[X], deg(P) = 1\} \cup \left\{\lambda(X-\alpha)^n, (\lambda, \alpha, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}\right\}$$

**Exercice D.5** : Trouver tous les polynômes tels que :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

**1er cas : Si $P = c$ est un polynôme constant.**
On a alors :

$$c = c^2$$

On en déduit donc que :

$$c \in \{0; 1\}$$

**2ième cas : Si $deg(P) \geq 1$**
On va montrer que les deux seules racines complexes de P sont 0 et 1.
On pose R l'ensemble des racines de P :

$$R = \{z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\}$$

On sait que $z$ est non vide car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.
On a alors :

$$P(z^2) = P(z)P(z+1) = 0$$

On en déduit donc que $z \in R \Longrightarrow z^2 \in R$.
Par un récurrence triviale on en déduit donc que :

$$z \in R \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, z^{2n} \in R$$

Il faut alors distinguer plusieurs cas car on a potentiellement une infinité de racine, ce qui est impossible car $deg(P) \geq 1$.

- **1er cas : Soit $z \in R$, $|z| > 1$**

On a alors : $(z^{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite composée que de racines de P et tel que :

$$\lim_n |z|^{2n} = +\infty$$

Donc P admet une infinité de racines. Impossible !

- **2ième cas : Soit $z \in R$, $0 < |z| < 1$**

On a alors : $(z^{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite composée que de racines de P et tel que : $\lim_n |z|^{2n} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, z^{2n} \neq 0$.
Donc P admet une infinité de racines. Impossible !

On en déduit donc que :

$$z \in R \Longrightarrow |z| = 1 \; ou \; z = 0$$

On sait donc que :

$$z \in R \Longrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta} \; ou \; z = 0$$

Si $z = e^{i\theta} \in R$.
On a alors :

$$\begin{aligned} P((z-1)^2) = P(z-1)P(z) = 0 \\ \Longrightarrow (z-1)^2 \in R \\ \Longrightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 \\ ou \\ |z-1| = 1 \end{cases} \\ \Longrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ ou \\ (1 - cos(\theta))^2 + sin^2(\theta) = 1 \end{cases} \\ \Longrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ ou \\ cos(\theta) = 1 \end{cases} \\ \Longrightarrow z = 1 \end{aligned}$$

Ainsi les seules racines de P sont 0 et 1.

On pose alors :

$$P(X) = \lambda X^k (X-1)^{k'}, \lambda \in \mathbb{C}$$

On a alors :

$$P(X^2) = \lambda X^{2k}(X^2 - 1)^{k'}$$
$$P(X)P(X+1) = \lambda^2 X^{k+k'}(X+1)^k (X-1)^{k'}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} \lambda^2 = \lambda \\ 2k = k + k' \\ k = k' \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1) \Leftrightarrow P = \{0_{\mathbb{R}[X]}\} \cup \{(X^2 - X)^k ; k \in \mathbb{N}\}$$

## Partie E : Relation coefficients racines

**Exercice E.1** : a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

b) Montrer alors que toutes ses racines sont réelles, simples et dans l'intervalle [-2 ;2].

a) Il y a deux choses à démontrer dans cette question, l'existence et l'unicité.
1) Montrons l'unicité. On suppose qu'il existe $P_1$ et $P_2$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, P_1\left(z + \frac{1}{z}\right) = P_2\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

On pose :

$$H = P_1 - P_2$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H\left(n + \frac{1}{n}\right) = H\left(\frac{n^2+1}{n}\right) = 0$$

Or on sait que :

$$\lim_{n} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$$

On en déduit donc que la suite $u_n = n + \frac{1}{n}$ admet une infinité de valeurs distinctes. Donc $H$ admet une infinité de racines. Donc $H = 0_{\mathbb{C}[X]}$

2) Montrons à présent l'existence.

Un rapide calcul montre que :

$P_0(X) = 2$ convient

$P_1(X) = X$ convient

$P_2(X) = X^2 - 2$ convient.

$P_3(X) = X^3 - 3X$ convient.

On peut donc conjecturer que :

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

On pose la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n): \begin{cases} P_n \; et \; P_{n+1} \; existe \\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

**Initialisation** : vrai pour $n = 0$ d'après les calculs précédents.

**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose vraie :

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

On pose :

$$Q(X) = XP_{n+2}(X) - P_{n+1}(X)$$

On a donc que $P_{n+2}$ et $P_{n+1}$ existe. De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}^*, Q\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right) P_{n+2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\right) - \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) \\ &= z^{n+3} + \frac{1}{z^{n+3}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, Q = P_{n+3} \; par \; unicité$$

**Conclusion** : On conclut d'après le principe de récurrence.

b) On sait que $P_0 = 2 \; et \; P_1 = X, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. On peut donc démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, deg(P_n) = n$$

Là ici il faut faire une récurrence double !!

**Initialisation** : La proposition est vraie au rang 0 et 1 d'après les calculs précédents.

**Hérédité** : Soit $n$ un entier naturel fixé. On suppose la proposition vraie au rang $n$ et $n + 1$. On a donc :

$$deg(P_n) = n \; et \; deg(P_{n+1}) = n + 1$$

On en déduit donc que :

$$deg(XP_{n+1} - P_n) = n + 2$$

On a donc :

$$deg(P_{n+2}) = n + 2$$

Ainsi la proposition est héréditaire.

**Conclusion** : On conclut d'après le principe de récurrence.

Ainsi $P_n$ admet exactement n racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité. Il reste à démontrer que ces racines sont simples et comprises dans l'intervalle $]-2; 2[$.

On fixe n. On pose $z = e^{i\theta}$. On a alors :

$$P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = e^{ni\theta} + \frac{1}{e^{ni\theta}} \Longrightarrow P_n(2\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On pose $x = 2\cos(\theta)$. On a donc :

$$\forall x \in [-2; 2], P_n(x) = \cos\left(n \arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

On résout :

$$\cos\left(n \arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

On sait que :

$$\forall x \in [-1;1]\, arccos(x) \in [0;\ \pi]$$

On résout :

$$0 \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leq \pi$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} + k \leq n$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq n-1$$

On en déduit que :

$$P\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = 0, \forall k \in [\![0; n-1]\!]$$

On pose :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

On a donc d'après les calculs précédents :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], u_k \in [0; \pi]$$

De plus on a :

$$0 < u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < \pi$$

On a donc n racines de $P_n$ : $\alpha_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

Comme le degré de $P_n$ est n, on a toutes les racines. Qui sont bien simples (cosinus restreint sur $[0, \pi]$ est une bijection !), on a toutes les racines de $P_n$.

**Exercice E.2** : On pose un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ (C'est-à-dire que tous les coefficients de $P$ sont dans $\mathbb{Z}$) :

$$P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{, où } \forall k \in [\![0; n-1]\!], a_k \in \mathbb{Z}$$

a) Montrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors cette racine divise $a_0$.
b) Les polynômes $P(X) = X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $Q(X) = X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ une racine de $P$. On a donc :

$$P(\alpha) = \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k = 0$$
$$\Rightarrow \alpha\left(\alpha^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \alpha^{k-1}\right) + a_0 = 0$$
$$\Rightarrow a_0 = -\alpha\left(\alpha^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1} \alpha^k\right)$$

Donc $\alpha$ divise $a_0$.
b) On a : $P(X) = X^3 - X^2 - 109X - 11$
On en déduit donc que $P \in \mathbb{Z}[X]$. On en déduit donc que P admet une racine a dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $a$ divise $11$.
On a donc 4 candidats possibles : $\{1; -1; 11; -11\}$.
Il suffit alors de calculer :

$$P(1) = -120, P(-1) = 96, P(11) = 0$$

Donc P admet une racine dans $\mathbb{Z}$.

On fait de même avec $Q(X) = X^{10} + X^5 + 1 \Rightarrow Q(1) = 3\ et\ Q(-1) = 1$. Donc Q n'admet pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

**Exercice E.3** : Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$$

1) Factoriser $P_n$ sur $\mathbb{C}$.
2) En déduire que :

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$$

1) On résout :

$$P_n(X) = 0 \Leftrightarrow (X+1)^n - (X-1)^n = 0$$

On a $P_n(1) = 2^n$ donc 1 n'est pas racine de $P_n(X)$. On a :

$$P_n(X) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{X+1}{X-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in [\![1; n-1]\!]$$

On voit que $k = 0$ n'est pas solution !
On a donc :

$$\Leftrightarrow X + 1 = Xe^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}}$$
$$\Leftrightarrow X = -i\frac{cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in [\![1; n-1]\!]$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in [\![1; n-1]\!]$$

On en déduit donc que :

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n = 2n \prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$$

b) Il suffit de prendre $n = 2p + 1$ et $X = 0$. On a alors :

$$2(2p+1)\prod_{k=1}^{2p}\left(i\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right) = 2$$
$$\Rightarrow (i)^{2p}\prod_{k=1}^{2p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right) = \frac{1}{2p+1}$$
$$\Rightarrow (-1)^{p}\prod_{k=1}^{2p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right) = \frac{1}{2p+1}$$

De plus on a :

$$\prod_{k=1}^{2p+1}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)\prod_{k=p+1}^{2p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)$$

Or on remarque que :

$$\prod_{k=p+1}^{2p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{(2p+1-k)\pi}{2p+1}\right)}\right)$$
$$=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{tan\left(\pi-\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)$$
$$=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{-1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)$$
$$=(-1)^p\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)$$

On a donc :

$$\left(\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)\right)^2=\frac{1}{2p+1}$$
$$\Rightarrow\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right)=\sqrt{\frac{1}{2p+1}}=\frac{1}{\sqrt{2p+1}}$$

**Exercice E.4** : Soient $\alpha,\beta,\gamma$ les racines de $P(X)=X^3-5X^2+6X-1$. Déterminer la valeur exacte de :

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}$$

Il suffit d'utiliser les relations coefficients racines.
Soient $\alpha,\beta,\gamma$ les racines complexes de P. Comme le coefficient dominant de P est 1 on a :

$$X^3-5X^2+6X-1=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$$
$$=X^3-(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X-\alpha\beta\gamma$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}=\frac{(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\gamma)+(1-\beta)(1-\alpha)}{(1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha)}$$
$$=\frac{3-(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)+2(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha)}$$

De la relation

$$X^3-5X^2+6X-1=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$$

On obtient en posant $X=1$ :

$$(1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha)=1$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}=-8$$

**Exercice E.5** : Soit n un entier naturel et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P(X) = (X+1)^n - e^{2in\theta}$.
1) Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire les valeurs de :

$$\prod_{k=0}^{n-1} sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) \ et \ \prod_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1) Il suffit de déterminer les racines de P sur $\mathbb{C}$ :

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow (X+1)^n = e^{2in\theta}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{e^{2i\theta}}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{X+1}{e^{2i\theta}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

$$\Leftrightarrow X = e^{2i\left(k\frac{\pi}{n}+\theta\right)} - 1 = e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)} \times 2isin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$$

On en déduit donc que :

$$(X+1)^n - e^{2in\theta} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}+i\theta} \times 2isin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)\right)$$

2) On pose à présent $X = 0$ on obtient :

$$1 - e^{2in\theta} = (-1)^n e^{in\theta} 2^n i^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}$$

Or on sait que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} = (i)^{n-1}$$

On a donc :

$$2i\sin(n\theta) = (-1)^n \times 2^n \times i^{2n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) = -\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$$

Pour la question 2 il suffit de voir que les $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{1\leq k\leq n-1}$ sont les racines de $1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

On a donc :

$$1 + X + \cdots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Il suffit ensuite de remplacer $X = 1$ et on obtient :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} -2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = (-1)^{n-1} i^{n-1} 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Or on sait que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k} = e^{\frac{i\pi}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} = i^{n-1}$$

On en déduit donc que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$