Correction DS n°6

Exercice 1 : Une somme directe

On pose :

$$F = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ } tel\ que\ a + d = 0\right\}$$
$$G = vect(I_2)$$

1) Démontrer que F est un espace vectoriel de dimension finie, en donner une base et sa dimension.
2) Démontrer que :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$$

3) Décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans $F \oplus G$.

1) On a :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow d = -a \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\boldsymbol{F = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}}$$

F est donc un espace vectoriel. De plus on a :

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ en est une base génératrice. Montrons qu'elle est libre.

On résout :

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{B}$ est **libre et génératrice** de F, c'est donc une **base** et sa dimension est 3.

2) On peut le faire de différentes façons.

Méthode 1 : Montrer que $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \cup \{I_2\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Là encore on peut le faire de différentes façons.

- $Card(\mathcal{B}_2) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ revient à montrer que $\mathcal{B}_2$ est libre.

On résout :

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 I_2 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

(L_1) et (L_4) donnent $\lambda_1 = 0 = \lambda_4$

Donc **$\mathcal{B}_2$ est libre, c'est donc une base au vue de son cardinal**.

- $Card(\mathcal{B}_2) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ revient à montrer que $\mathcal{B}_2$ est génératrice.

On a :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = vect(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$$

Montrer que $\mathcal{B}_2$ est génératrice revient à montrer que les vecteurs de $\mathcal{B}_2$ peuvent engendrer car $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons cela. Pour plus de commodité on pose :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = (M_1, M_2, M_3)$$

On a :

$$\begin{cases} E_{1,1} = \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2}M_1 \\ E_{1,2} = M_2 \\ E_{2,1} = M_3 \\ E_{2,2} = \frac{1}{2}I_2 - \frac{1}{2}M_1 \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{B}_2$ est génératrice, c'est donc une base au vue de son cardinal.

Méthode 2 : Caractérisation des sommes directes.

a) Egalité des dimensions

On a :

$$\dim(F) + \dim(G) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$$

b) Intersection réduit à $\{O_2\}$

$$M \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}\ tel\ que\ M = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix} \\ [M]_{1,1} + [M]_{2,2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow M = 0_2$$

Ainsi on a :

$$F \cap G = \{O_2\}$$

Par la caractérisation des sommes directes, $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Méthode 3 : Analyse-synthèse

a) Analyse

On a :

$$M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}x & y\\z & -x\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix}t & 0\\0 & t\end{pmatrix}}_{\in G}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + t = a \\ y = b \\ z = c \\ t - x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a-d) \\ y = b \\ z = c \\ t = \frac{1}{2}(a+d) \end{cases}$$

b) Synthèse

On a :

$$\forall M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(a-d) & b\\ c & \frac{1}{2}(d-a)\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+d & 0\\0 & a+d\end{pmatrix}}_{\in G}$$

On en déduit donc que :

$$\forall M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exists!\,(M_F, M_G) \in F \times G\ tel\ que\ M = M_G + M_F$$

On a donc $\boldsymbol{\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G}$.

3) D'après les questions précédentes on a :

$$\boxed{\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 2\\3 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 0\\0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}}_{\in G}}$$

Exercice 2 : Une suite définie par une intégrale

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$$

1) Expliquez pourquoi la suite (I_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.
2) Calculer I_0, I_1, I_2.
3) Dans cette question on cherche à calculer I_3.
a) Montrer que :

$$I_3 = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

b) En déduire que :

$$I_3 = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

4) a) Démontrer que la suite (I_n) est croissante.
b) En déduire la convergence de (I_n).
c) Montrer que :

$$0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

d) Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$

On va chercher à présent un équivalent de la suite $(I_n - 1)$ pour savoir « à quelle vitesse » I_n converge vers sa limite.

5) a) Démontrer, à l'aide d'une IPP que :

$$I_n - 1 = -\frac{\ln(2)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

b) Démontrer que :

$$\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, \ln(1+x^n) \leq x^n$$

c) En déduire que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) On sait que :

$$\boldsymbol{f_n : x \mapsto \frac{1}{1+x^n} \in \mathcal{C}^0([0;1])} \textit{ par quotient}$$

Donc f_n admet une primitive sur $[0;1]$ donc **I_n est bien définie**.

2) On a :

$$\boxed{I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^0}\,dx = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)}$$

$$\boxed{I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}}$$

3) a) On sait que :

$$\forall x \in [0;1], 1 + x^3 = (1+x)(x^2-x+1)$$

On décompose alors en éléments simples. On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in [0;1], \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{a(x^2-x+1) + (bx+c)(1+x)}{1+x^3} = \frac{x^2(a+b) + x(b+c-a) + a+c}{1+x^3}$$

On identifie :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c-a=0 \\ c+a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=-\dfrac{1}{3} \\ c=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0;1], \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

On a donc :

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx}$$

Par linéarité de l'intégrale.

b) On a :

$$\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2-x+1)]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = -2\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = -\sqrt{3} \times \left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

$$= -\sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -2\sqrt{3} \times \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -2\sqrt{3} \times \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

4) a) On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}dx$$

Or on a :

$$\forall x \in [0;1], \begin{cases} x^n \geq 0 \\ 1+x^{n+1} > 0 \\ 1+x^n > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} > 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}dx > 0$$

Par croissance de l'intégrale.

On en déduit donc que **(I_n) est croissante**.

b) De plus on a :

$$\forall x \in [0;1], \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \leq \int_0^1 1dx \Rightarrow I_n \leq 1$$

Donc (I_n) est croissante et majorée, elle converge.

c) On a :

$$1-I_n=1-\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$$

De plus on sait que :

$$\forall x\in[0;1], 0\leq \frac{x^n}{1+x^n}\leq x^n \Longrightarrow \int_0^1 0\,dx\leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx\leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\boxed{\Longrightarrow \mathbf{0\leq 1-I_n\leq \frac{1}{n+1}}}$$

d) On a d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_n(1-I_n)=0\Longrightarrow \lim_n I_n=\lim_n \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx=1}$$

5) a) On a :

$$I_n-1=-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx=-\int_0^1 \underbrace{\frac{x^{n-1}}{1+x^n}}_{=u'(x)}\times \underbrace{x}_{=v(x)}\,dx$$

$$=-\left[\frac{x}{n}\times\ln(1+x^n)\right]_0^1+\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

$$\boxed{=-\frac{\ln(2)}{n}+\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx}$$

b) On va démontrer que :

$$\forall x\in[0;1], \ln(1+x)\leq x$$

On peut le faire en étudiant la fonction écart, en utilisant la concavité de la fonction ln car sa dérivée seconde est négative, ou bien à l'aide d'une intégrale !

Méthode 1 : Fonction écart

On pose :

$$e:\begin{cases}[0;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x-\ln(1+x)\end{cases}$$

On sait que e est dérivable sur $[0;1]$ et :

$$\forall x\in[0;1], e'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad$ 1
$e'(x)$	$+$
e	0 $\nearrow$

De plus comme $e(0)=0$ on en déduit donc que :

$$\forall x\in[0;1], e(x)\geq 0$$

On a donc :

$$\boxed{\forall x\in[0;1], x\geq \ln(1+x)}$$

Méthode 2 : Par concavité

On pose : $g: x\mapsto \ln(1+x)$

$$\forall x\in[0;1], g'(x)=\frac{1}{x+1}\Longrightarrow \forall x\in[0;1], g''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}<0$$

Ainsi g est concave sur $[0;1]$ et sa courbe représentative est en-dessous de ses tangentes. Or on a :

$$(T_0): y=x$$

On en déduit donc par concavité que :

$$\boxed{\forall x \in [0;1], \ln(1+x) \leq x}$$

Méthode 3 : Par croissante de l'intégrale

On sait que :

$$\forall x \in [0;1], \forall t \in [0;x], \frac{1}{1+t} \leq 1 \Longrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x 1dt \Longrightarrow \ln(1+x) \leq x$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \mathrm{x}^n \in [0;1]$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, \ln(1+x^n) \leq x^n}$$

c) On a :

$$\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n \Longrightarrow \int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0 \Longrightarrow \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a donc :

$$\boxed{I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Remarque : On vient de faire ce que l'on appelle un développement asymptotique ! On a ainsi la convergence de I_n, et une vitesse de convergence de I_n vers 1 ! Ce qui est beaucoup plus précis ! On peut par exemple en déduire que : $\left(\sum(1-I_n)\right)$ diverge !

Exercice 3 : Les polynômes et les nombres de Bernoulli

1) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists!\, Q \in \mathbb{R}[X]\ tel\ que \begin{cases} Q' = P \\ \int_0^1 Q(t)dt = 0 \end{cases}$$

On définie alors pare récurrence la suite unique de polynôme (B_n) définie par :

$$\boxed{\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} B_n' = nB_{n-1} \\ \int_0^1 B_n(t)dt = 0 \end{cases} \end{cases}}$$

Ces polynômes sont appelés les polynômes de Bernoulli.

2) a) Déterminer $B_1, B_2\ et\ B_3$.

b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.

c) Démontrer que la famille $(B_0, \dots, B_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On pose dans toute la suite de ce problème :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0)$$

Ces nombres sont appelés les nombres de Bernoulli.

3) a) Calculer $b_0, b_1, b_2\ et\ b_3$.

b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

4) On pose la suite de polynômes (C_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases} C_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\begin{cases} C_n'=nC_{n-1} \\ \int_0^1 C_n(t)dt=0\end{cases}\end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, B_n(X)=(-1)^nB_n(1-X)$$

c) En déduire que :

$$\forall p\in\mathbb{N}, B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

5) a) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, B_n(X)=2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right)+B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

b) En déduire que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*, b_{2p+1}=0 \; et \; B_p(1)=b_p, p\geq 2$$

6) a) Montrer que :

$$\forall n\geq 2, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}=b_n$$

b) En déduire que :

$$\forall n\geq 1, b_n=-\frac{1}{n+1}\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k$$

1) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On pose :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{\deg(P)}p_kX^k$$

On a :

$$Q'=P \Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R} \; tel\; que \; Q(X)=\sum_{k=0}^{\deg(P)}\frac{p_k}{k+1}X^{k+1}+c=\sum_{k=1}^{\deg(P)+1}\frac{p_{k-1}}{k}X^k+c$$

Remarque : Toute primitive est définie à partir d'une constante.
Or on veut :

$$\int_0^1 Q(x)dx=0 \Longrightarrow \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\deg(P)+1}\frac{p_{k+1}}{k}X^k+c\right)dx=0 \Longrightarrow \boxed{c=-\sum_{k=1}^{\deg(P)+1}\frac{p_{k-1}}{k(k+1)}}$$

Ainsi c est déterminée et **le polynôme Q est unique**.

2) a) On peut se servir de ce que l'on a fait précédemment ou le faire à la main !

$$B_1(X)=\frac{p_0}{1}X-\frac{p_0}{2}=X-\frac{1}{2}$$

$$(B_2)'(X)=2\times\left(X-\frac{1}{2}\right)=2X-1 \Longrightarrow B_2(X)=X^2-X+c$$

De plus on a :

$$\int_0^1 B_2(x)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+c=0 \Longrightarrow c=\frac{1}{6} \Longrightarrow B_2(X)=X^2-X+\frac{1}{6}$$

Enfin on a :

$$(B_3)'(X)=3B_2(X)=3X^2-3X+\frac{1}{2} \Longrightarrow B_3(X)=X^3-\frac{3}{2}X^2+\frac{X}{2}+c$$

Enfin on a :

$$\int_0^1 B_3(x)\,dx=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+c=0 \Longrightarrow c=0$$

On a donc les 4 premiers polynômes de Bernoulli :

$$\boxed{\left(\mathbf{1}\,;\boldsymbol{X}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,;\,\boldsymbol{X}^{2}-\boldsymbol{X}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\,;\,\,\boldsymbol{X}^{3}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{X}^{2}+\frac{\boldsymbol{X}}{\mathbf{2}}\right)}$$

b) On pose comme proposition :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathcal{P}(n):\deg(B_n)=n\;et\;CD(B_n)=1"$$

Démontrons cela par récurrence.

Initialisation : $n=0$

On a $B_0(X)=1\Longrightarrow\deg(B_0)=0\;et\;CD(B_0)=1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

On peut donc écrire :

$$B_n(X)=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}p_kX^k$$

$$\Longrightarrow(B_{n+1})'(X)=(n+1)X^n+\sum_{k=0}^{n-1}(n+1)p_kX^k$$

$$\Longrightarrow B_{n+1}(X)=X^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+1)p_k}{k+1}X^{k+1}+c$$

$$\Longrightarrow\deg(B_{n+1})=n+1\;et\;CD(B_{n+1})=1$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

c) D'après la question précédente **la famille $(B_0,\dots,B_n)$ est échelonnée donc libre**. De plus :

$$\boldsymbol{Card(B_0,\dots,B_n)=n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])}$$

C'est donc **une base de $\mathbb{R}_n[X]$**

3) a) On a :

$$(B_0,B_1,B_2,B_3)=\left(1\,;X-\frac{1}{2}\,;\,X^2-X+\frac{1}{6}\,;\,\,X^3-\frac{3}{2}X^2+\frac{X}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow\boxed{(\boldsymbol{b_0,b_1,b_2,b_3})=\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}},\mathbf{0}\right)}$$

b) On pose comme proposition :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathcal{Q}(n):"B_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}X^k"$$

Initialisation : $n=0$

On a :

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}b_{0-k}X^0=b_0=1=B_0(X)$$

Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{Q}(n)$. On a alors :

$$B_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}X^k$$

On a donc :

$$(B_{n+1})'(X)=(n+1)B_n(X)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}X^k$$

On en déduit donc que :

$$\exists c\in\mathbb{R}\;tel\;que:B_{n+1}(X)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}b_{n-k}}{k+1}X^{k+1}+c$$

De plus on a :

$$B_{n+1}(0)=c=b_{n+1}$$

On a donc :

$$B_{n+1}(X) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}b_{n-k}X^{k+1} + b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(n+1)\binom{n}{k-1}\frac{1}{k}b_{n-(k-1)}X^k + b_{n+1}$$

De plus on a :

$$(n+1)\binom{n}{k-1}\frac{1}{k}b_{n-(k-1)} = (n+1)\times\frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}\times\frac{1}{k+1}\times b_{n+1-k}$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!\times(n+1-k)!}b_{n+1-k} = \binom{n+1}{k}b_{n+1-k}$$

Enfin on a :

$$b_{n+1} = \binom{n+1}{0}b_{n+1}$$

On a donc :

$$B_{n+1}(X) = \sum_{k=1}^{n+1}(n+1)\binom{n}{k-1}\frac{1}{k}b_{n-(k-1)}X^k + b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}b_{n+1-k}X^k + \binom{n+1}{0}b_{n+1}$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}b_{n+1-k}X^k}$$

Donc $Q(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

4) a) On a :

$$\boxed{\boldsymbol{C_0(X) = (-1)^0B_0(1-X) = 1}}$$

De plus on a :

$$C_n(X) = (-1)^nB_n(1-X) \underset{Par\ composée}{\Longrightarrow} C_n'(X) = (-1)^n\times(-1)\times(B_n)'(1-X)$$
$$= (-1)^{n+1}\times n\times B_{n-1}(1-X)$$

Or on sait que :

$$(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}\times(-1)^2 = (-1)^{n-1}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{C_n'(X) = n\times(-1)^{n-1}\times B_{n-1}(1-X) = nC_{n-1}(X)}}$$

Enfin on a :

$$\int_0^1 C_n(t)dt = \int_0^1(-1)^nB_n(1-t)\,dt = (-1)^n\int_0^1 B_n(1-t)\,dt$$

On effectue le changement de variable $\boldsymbol{u = 1-t}$:

a) On change les bornes :

$$\begin{cases} t=0 \Longrightarrow u=1 \\ t=1 \Longrightarrow u=0 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

$$t = 1-u \Longrightarrow dt = -du$$

c) On remplace

$$\int_0^1 B_n(1-t)\,dt = \int_1^0 B_n(u)\,(-du) = \int_0^1 B_n(u)\,du = 0$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\boldsymbol{\int_0^1 C_n(t)dt = 0}}$$

b) Par unicité de la famille de polynôme B_n, on en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, C_n = B_n \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^nB_n(1-X)$

c) Il suffit de voir que :

$$\boldsymbol{\forall p\in\mathbb{N}, B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{2p+1}B_{2p+1}\left(1-\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

5) a) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

On va montrer que (P_n) vérifie la même relation de récurrence que (B_n), et comme $P_0 = B_0$, par unicité de la suite de polynôme (B_n), on démontre que $P_n = B_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$P_0(X) = \frac{1}{2} \times \left(B_0\left(\frac{X}{2}\right) + B_1\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

De plus on a :

$$(P_n)'(X) \underset{Par\ composée}{=} 2^{n-1} \times \frac{1}{2}\left(B_n'\left(\frac{X}{2}\right) + B_n'\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = n \times 2^{n-1}\left(B_{n-1}\left(\frac{X}{2}\right) + B_{n-1}\left(\frac{1+X}{2}\right)\right) = nP_{n-1}(X)$$

Enfin on a :

$$\int_0^1 P_n(t)dt = 2^{n-1}\int_0^1 \left(B_n\left(\frac{t}{2}\right) + B_n\left(\frac{1+t}{2}\right)\right)dt = 2^{n-1}\left(\int_0^1 B_n\left(\frac{t}{2}\right)dt + \int_0^1 B_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt\right)$$

On pose le changement de variable $u = \frac{t}{2}$ pour la première intégrale.

a) On change les bornes :

$$\begin{cases} t = 0 \Longrightarrow u = 0 \\ t = 1 \Longrightarrow u = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b) Calcul du dt

$$t = 2u \Longrightarrow dt = 2du$$

c) On remplace

$$\int_0^1 B_n\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(u)\,du$$

On pose le changement de variable $u = \frac{t+1}{2}$ pour la deuxième intégrale.

a) On change les bornes :

$$\begin{cases} t = 0 \Longrightarrow u = \dfrac{1}{2} \\ t = 1 \Longrightarrow u = 1 \end{cases}$$

b) Calcul du dt

$$t = 2u - 1 \Longrightarrow dt = 2du$$

c) On remplace

$$\int_0^1 B_n\left(\frac{t+1}{2}\right)dt = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(u)\,du$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 B_n\left(\frac{t}{2}\right)dt + \int_0^1 B_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(u)\,du + \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(u)\,du\right) = 2 \times \int_0^1 B_n(u)\,du = 0$$

D'après la relation de Chasles sur les intégrales.
Ainsi P_n vérifie la même relation de récurrence que B_n, ce sont donc les mêmes polynômes :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)}$$

b) On a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = B_{2p+1}(0) = 2^{2p} \times \left(B_{2p+1}(0) + B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Or on sait d'après la question 4,c) que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = 2^{2p} b_{2p+1} \Longrightarrow b_{2p+1}(1 - 4^p) = 0$$

Par intégrité de $\mathbb{R}$ on en déduit donc que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p+1} = 0}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0) = (-1)^n B_n(1)$$

Si $n = 2p$ on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, b_{2p} = B_{2p}(1)$$

De plus si $n = 2p + 1, p \geq 1$ on a :

$$B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \Longrightarrow B_{2p+1}(1) = 4^p\left(B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) + B_{2p+1}(1)\right)$$

Or on sait que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

On a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, B_{2p+1}(1) = 4^p B_{2p+1}(1) \Longrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*, B_{2p+1}(1) = 0 = b_{2p+1}$$

On a donc :

$$\boxed{B_p(1) = b_p, p \geq 2}$$

6) a) On sait que :

$$\forall n \geq 0, B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k \Longrightarrow \forall n \geq 0, B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

Or on sait que :

$$\forall n \geq 2, B_n(1) = B_n(0) = b_n$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = b_n}$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = b_{n+1}$$

Or on sait que :

$$\forall n \geq 0, \forall k \in [\![0; n+1]\!], \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1-k}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{n+1-k} b_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k = b_{n+1} + \binom{n+1}{n} b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

Or on sait que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = b_{n+1}$$

On en déduit donc que :

$$b_{n+1} + \binom{n+1}{n} b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k = b_{n+1}$$

$$\boxed{\Longrightarrow b_n = -\frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k}$$

Problème 1 : DL de la fonction tangente à tout ordre

Le but de ce problème est de déterminer un algorithme nous permettant de déterminer le développement limité de tan à l'ordre $2n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Partie A : On pose le problème

1) Pourquoi tan admet un développement limité tout ordre en 0 ?

Dans le reste de l'exercice on pose la suite (t_n) définie par :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} t_k x^k + o(x^n)$$

2) Déterminer la valeur de t_0 et de t_1.

3) Expliquez pourquoi on sait que :

$$\forall k \in [\![0; 2n]\!], t_{2k} = 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = -i \times \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}$$

Dans tout le reste de l'exercice on pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = -i \times g(ix)$$

5) Pourquoi $g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$?

6) Démontrer que :

$$\forall k \in [0; 2n], t_k = -i^{k+1} \times \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

Dans le reste du problème on pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

Partie B : Etude de la suite (u_n)

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - g^2(x)$$

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}$$

5) Déterminer le $DL_6(0)$ de $\tan(x)$.

6) Ecrire une fonction Python qui en entrée demande une valeur de n et en sortie renvoie la liste $[t_0, \dots, t_n]$.

Partie A :

1) On sait que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Par quotient, on en déduit que $tan \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$ donc on peut écrire d'après Taylor :

$$\boldsymbol{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)}$$

Ainsi tan admet un DL à tout ordre.

2) On a :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{x+o(x)}{1+o(x)}=x+o(x)$$

Ainsi $\boldsymbol{t_0=0\ et\ t_1=1}$.

3) On sait que tan est impaire, donc le développement polynômiale de tan est aussi impaire donc :

$$\boxed{\forall k\in[\![0;2n]\!],t_{2k}=0}$$

4) On a :

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}=-i\times\frac{e^{-ix}(e^{2ix}-1)}{e^{-ix}(e^{2ix}+1)}=-i\times\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}}$$

5) On sait que $x\mapsto e^x\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que : $\forall x\in\mathbb{R},e^{2x}+1\neq0$.

Par composée et quotient on en déduit donc que $\boldsymbol{g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}$.

6) D'après la formule de Taylor et l'unicité du DL, on sait que :

$$\forall k\in[\![0;2n]\!],t_k=\frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}$$

De plus on sait d'après la question 4) que :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\tan(x)=-i\times g(ix)$$

Par récurrence immédiate ou par itération du procédé, on a :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\forall k\in\mathbb{N},\tan^{(k)}(x)=-(i)^{k+1}g^{(k)}(ix)$$

On en déduit donc que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\tan^{(k)}(0)=-(i)^{k+1}g^{(k)}(0)$$

$$\boxed{\Longrightarrow\forall k\in\mathbb{N},t_k=\frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}=-\frac{(i)^{k+1}g^{(k)}(0)}{k!}}$$

Partie B :

1) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Longrightarrow\forall x\in\mathbb{R},g'^{(x)}=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

De plus on a :

$$1-g^2(x)=1-\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{(e^{2x}+1)^2-(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},g'(x)=1-g^2(x)}$$

2) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},g'(x)=1-g^2(x)=-(g(x)-1)(g(x)+1)$$

D'après la formule de Leibniz on a :

$$\forall n\geq1,\forall x\in\mathbb{R},\frac{d^n(g'(x))}{dx^n}=-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(g(x)-1)^{(k)}(g(x)+1)^{(n-k)}$$

Or on a :

$$\forall k\geq1,(g(x)-1)^{(k)}=g^{(k)}(x)-1^{(k)}=g^{(k)}(x)$$

De même on a :

$$\forall k\leq n-1,(g(x)+1)^{(n-k)}=g^{(n-k)}(x)+1^{(n-k)}=g^{(n-k)}(x)$$

Ainsi on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(g(x)-1)^{(k)}(g(x)+1)^{(n-k)}=$$

$$=(g(x)-1)(g(x)+1)^{(n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(g(x)\right)^{(k)}\left(g(x)\right)^{(n-k)}+(g(x)-1)^{(n)}(g(x)+1)$$

Or on a :

$$\forall n\geq1,(g(x)-1)(g(x)+1)^{(n)}+(g(x)-1)^{(n)}(g(x)+1)=g(x)g^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)g(x)$$

$$= \binom{n}{0} g(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{n} g^{(n)}(x)g(x)$$

Ainsi on a :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n(g'(x))}{dx^n} = -\left(\binom{n}{0} g(x)g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (g(x))^{(k)} (g(x))^{(n-k)} + \binom{n}{n} g^{(n)}(x)g(x)\right)$$

$$\boxed{= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)}$$

3) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^n(g'(x))}{dx^n} = g^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq 1, g^{(n+1)}(0) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = -(n!) \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = -(n!) \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)!\, u_{n+1} = -(n!) \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) u_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}}$$

4) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = -(i)^{n+1} u_n \ et \ (n+1) u_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1) t_{n+1}}{-i^{n+2}} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{-i^{k+1}} \times \frac{t_{n-k}}{-i^{n-k+1}}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1) t_{n+1}}{i^n} = -\frac{1}{i^{2+n}} \sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}}$$

5) On sait que :

$$\tan(x) = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + t_4 x^4 + t_5 x^5 + t_6 x^6 + o(x^6)$$

De plus par imparité on a :

$$t_0 = t_2 = t_4 = t_6 = 0 \ et \ t_1 = 1$$

De plus d'après la question précédente on a :

$$3 t_3 = t_1^2 = 1 \Longrightarrow t_3 = \frac{1}{3}$$

$$5 \times t_5 = t_1 \times t_3 + t_3 \times t_1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow t_5 = \frac{2}{15}$$

On a donc :

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)}$$

6) On a :

```python
def dltan(n):
    u=[0,1]
    for i in range(2,n+1):
        t=0
        for j in range(i):
            t=t+u[j]*u[i-1-j]
        t=t/i
        u.append(t)
    return u
```

On peut tester et on trouve :

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 201
>>> dltan(6)
[0, 1, 0.0, 0.3333333333333333, 0.0, 0.13333333333333333, 0.0]
>>> 
```