DS n°6

Exercice 1 : Une somme directe

On pose :

$$F = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ tel\ que\ a + d = 0\right\}$$
$$G = vect(I_2)$$

1) Démontrer que F est un espace vectoriel de dimension finie, en donner une base et sa dimension.
2) Démontrer que :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$$

3) Décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans $F \oplus G$.

Exercice 2 : Une suite définie par une intégrale

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^n}\, dx$$

1) Expliquez pourquoi la suite (I_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.
2) Calculer I_0, I_1, I_2.
3) Dans cette question on cherche à calculer I_3.
   a) Montrer que :

$$I_3 = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}\, dx$$

   b) En déduire que :

$$I_3 = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

4) a) Démontrer que la suite (I_n) est croissante.
   b) En déduire la convergence de (I_n).
   c) Montrer que :

$$0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n + 1}$$

   d) Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$

On va chercher à présent un équivalent de la suite $(I_n - 1)$ pour savoir « à quelle vitesse » I_n converge vers sa limite.

5) a) Démontrer, à l'aide d'une IPP que :

$$I_n - 1 = -\frac{\ln(2)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1 + x^n)\, dx$$

b) Démontrer que :

$$\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, \ln(1+x^n) \leq x^n$$

c) En déduire que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3 : Les polynômes et les nombres de Bernoulli

1) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists! \, Q \in \mathbb{R}[X] \; tel \; que \begin{cases} Q' = P \\ \int_0^1 Q(t)dt = 0 \end{cases}$$

On définie alors pare récurrence la suite unique de polynôme (B_n) définie par :

$$\boxed{\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} B_n' = nB_{n-1} \\ \int_0^1 B_n(t)dt = 0 \end{cases} \end{cases}}$$

Ces polynômes sont appelés les polynômes de Bernoulli.

2) a) Déterminer $B_1, B_2 \; et \; B_3$.

b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.

c) Démontrer que la famille $(B_0, \dots, B_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On pose dans toute la suite de ce problème :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0)$$

Ces nombres sont appelés les nombres de Bernoulli.

3) a) Calculer $b_0, b_1, b_2 \; et \; b_3$.

b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

4) On pose la suite de polynômes (C_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} C_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} C_n' = nC_{n-1} \\ \int_0^1 C_n(t)dt = 0 \end{cases} \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

c) En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

5) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

b) En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p+1} = 0 \; et \; B_p(1) = b_p, p \geq 2$$

6) a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = b_n$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 2, b_n = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

Problème 1 : DL de la fonction tangente à tout ordre

Le but de ce problème est de déterminer un algorithme nous permettant de déterminer le développement limité de tan à l'ordre $2n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Partie A : On pose le problème

1) Pourquoi tan admet un développement limité tout ordre en 0 ?

Dans le reste de l'exercice on pose la suite (t_n) définie par :

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} t_k x^k + o(x^n)$$

2) Déterminer la valeur de t_0 et de t_1.

3) Expliquez pourquoi on sait que :

$$\forall k \in [\![0; 2n]\!], t_{2k} = 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = -i \times \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}$$

Dans tout le reste de l'exercice on pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = -i \times g(ix)$$

5) Pourquoi $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$?

6) Démontrer que :

$$\forall k \in [0; 2n], t_k = -i^{k+1} \times \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

Dans le reste du problème on pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

Partie B : Etude de la suite (u_n)

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - g^2(x)$$

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

3) En déduire que :

$$(n+1)u_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}$$

5) Déterminer le $DL_6(0)$ de $\tan(x)$.

6) Ecrire une fonction Python qui en entrée demande une valeur de n et en sortie renvoie la liste $[t_0, \dots, t_n]$.