

Chapitre 18 : Analyse asymptotique

Partie A : Relation de comparaison

I) Relation d'équivalence

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $f, g: I \rightarrow \mathbb{K}$ tels que $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{a\}$.

a) Définition d'une équivalence

Définition : On dit que :

- f est **équivalente** à g au voisinage de a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

. On note alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ ou } f \underset{a}{\sim} g$$

Exercice I.a.1 : Montrer que :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

Exercice I.a.2 : Montrer que :

$$\frac{x^3 + 5x + 1}{x + 7} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$$

Exemple I.a.3 : On pose $f(x) = x^7 + 3x^6 + 6x^4 + 3x^3$. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$ et en 0.

b) Propriétés

Propriété I.b.1 (composition à droite dans un équivalent) : Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{K}$, telle que g ne s'annule pas au voisinage de a et que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$. Soit ϕ une fonction à valeur dans I telle que $\lim_{t \rightarrow b} \phi(t) = a$ avec $b \in \bar{\mathbb{R}}$. On a :

$$f(\phi(t)) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(\phi(t))$$

Application I.b.2 : Montrer que :

$$\ln(1 + x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$$

Propriété I.b.3 (Relation d'équivalence) : La relation $\sim$ est une relation d'équivalence :

- (1) $\underset{x \rightarrow a}{\sim}$ est réflexive : $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} f$
- (2) $\underset{x \rightarrow a}{\sim}$ est symétrique : $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{x \rightarrow a}{\sim} f$
- (3) $\underset{x \rightarrow a}{\sim}$ est transitive : $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et $g \underset{x \rightarrow a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{x \rightarrow a}{\sim} h$

Application I.b.4 : Démontrer que :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Propriété I.b.5 : Soient f, g, h et u quatre fonctions telles que $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et $h \underset{x \rightarrow a}{\sim} u$. Alors on a :

- (1) Passage au produit : $fh \underset{x \rightarrow a}{\sim} gu$
- (2) Passage au quotient : $\frac{f}{h} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g}{u}$
- (3) Passage à la puissance : $\forall p \in \mathbb{N}, f^p \underset{x \rightarrow a}{\sim} g^p$
- (4) $\forall \alpha > 0, f^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g^\alpha$ (dès que f^α et g^α sont bien définies)

Application I.b.6 : Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Propriété I.b.7 : Soit $f \underset{a}{\sim} g$ on a alors :

- (1) f et g ont même signe au voisinage de a
- (2) g admet une limite (finie ou infinie) ℓ en a si et seulement si f admet la même limite.

Application I.b.8 : Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \ln(1 + x))}{\sinh(x)}$$

Application I.b.9 : Etudier le signe au voisinage de 0 de $x \mapsto e^{\ln(\cos(x)+x)} - 1$.

c) Ce que l'on ne peut pas faire

Contre-exemple I.c.1 : On ne peut ni additionner ni soustraire des équivalents :

$$f(x) = x + 1 \text{ et } g(x) = x + 2, h(x) = -x$$

Contre-exemple I.c.2 : On ne peut pas composer pas les équivalents :

$$f(x) = x^2 + x, g(x) = x^2 \text{ et } h: x \mapsto e^x$$

Contre-exemple I.c.3 : Lors de la mise en puissance d'un équivalent, celui-ci doit être constant :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

d) Equivalence pour les fonctions continues et dérivables

Propriété I.d.1 :

- Si f est continue en a , on a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(a)$ si $f(a) \neq 0$
- Si f est dérivable en a , on a : $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$ si $f'(a) \neq 0$

Exemple I.d.2 : On a :

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

Application I.d.3 : Déterminer :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 \left(\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)^5 - 1 \right)$$

II) Relation de domination, de négligeable

a) Définition et notation de Landau

Dans toute cette partie, on rappelle que g est une fonction ne s'annulant pas au voisinage de a .

Définition (domination) : On dit que la fonction f est **dominée** par g au voisinage de a si :

$$\frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a : \exists M > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x \in (]a - \delta; a + \delta[\setminus \{a\}) \cap I, |f(x)| \leq M|g(x)|$$

On note alors :

$$f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x)) \text{ ou } f = O_a(g)$$

Exemple II.a.1 : Montrer que :

$$x^2 \sin(x) = O_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Application II.a.2 : Montrer que :

$$\cos(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(1)$$

Définition (négligeable) : On dit que la fonction f est **négligeable** par g au voisinage de a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors :

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \text{ ou } f = o_a(g)$$

Exemple II.a.3 : Montrer que :

$$x^2 = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$$

Remarque : On a :

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \Leftrightarrow \exists \epsilon: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} f(x) = g(x)\epsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Application II.a.4 : Montrer que :

$$e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Remarque : ATTENTION à la somme avec les o !

Exemple II.a.5 : Montrer que :

$$o_{x \rightarrow 0}(x^2) + o_{x \rightarrow 0}(x^5) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

b) Propriétés

Propriété II.b.1 (croissance comparée) : Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $q > 1$. Alors :

$$\ln^\beta x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha); x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x}); |\ln^\beta(x)| = o_{x \rightarrow 0}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), e^{\alpha x} = o_{x \rightarrow -\infty}\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \text{ (quand cela est défini)}$$

Application II.b.2 : Montrer que :

$$\ln(1+x) = o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Propriété II.b.3 (Relation entre o , O et équivalence) : On a :

$$\begin{aligned} (1) f \sim_{x \rightarrow a} g &\Leftrightarrow f - g = o_a(g) \\ (2) f \sim_{x \rightarrow a} g &\Rightarrow f = O_{x \rightarrow a}(g) \text{ et } g = O_{x \rightarrow a}(f) \end{aligned}$$

III) Le cas des suites numériques

a) Une définition asymptotique

De même que sur les fonctions, on peut définir $\sim$, o et O pour les suites. On a même une commodité puisque ce qui nous intéresse ici concerne toujours $n \rightarrow +\infty$.

Définition :

- On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si elles ne s'annulent pas à partir d'un certain rang et que leur quotient tend vers 1 :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **dominée par** (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors : $u_n = O(v_n)$:

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n| \leq M v_n$$

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **négligeable** par rapport à (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors : $u_n = o(v_n)$:

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$$

Exemple III.a.1 : Montrer que :

$$\binom{n}{5} \sim \frac{n^5}{120} ; \frac{\cos(n) + 4}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) ; (n^3 + n) \sin(n) = o(n^5)$$

b) Propriétés

On a bien sûr les mêmes propriétés avec les suites qu'avec les fonctions.

Exemple III.b.1 : On pose $u_n = \ln(n)$, $v_n = \sqrt{n}$ et $w_n = 2^n$. Ecrire des relations de négligeabilité.

Exemple III.b.2 : Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2}$$