

Chapitre 18 : Analyse asymptotique

Partie B : Développement limité

Dans tout ce cours, on pose I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$.

I) Un polynôme + un reste

a) Le $DL_n(a)$

Définition : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n , noté $DL_n(a)$, en a si et seulement si :

$$\exists (a_0; \dots; a_n) \in \mathbb{K}^n, f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Remarque : Si f admet un développement limité à l'ordre n , on a :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie polynomiale de degré inférieur ou égale à } n} + \underbrace{o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)}_{\text{reste}}$$

On peut aussi écrire :

$$o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) = (x-a)^n \epsilon_n(x-a) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon_n(x-a) = 0$$

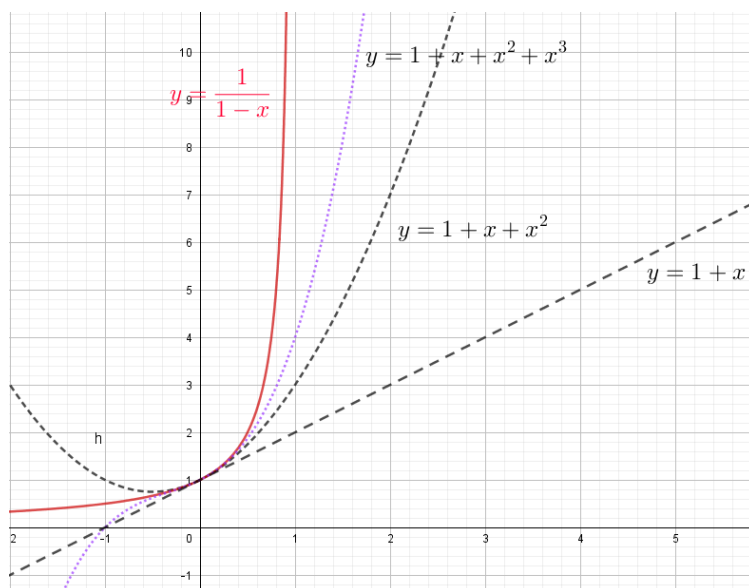
Exemple I.a.1 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

ATTENTION : Les DL nous permettent d'approcher les fonctions, mais n'a d'intérêt qu'au voisinage de a !!!

Application I.a.2 : Déterminer $DL_n(0)$ de :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$



Propriété I.a.3 (Troncature d'un DL) : Si f admet un $DL_n(a)$ alors f admet un $DL_p(a)$ où $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

$$\Rightarrow \forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_p(x-a)^p + o_{x \rightarrow a}((x-a)^p)$$

Application I.a.4 : Déterminer le $DL_2(0)$ de :

$$f: x \mapsto x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x)$$

b) Tout ramener au voisinage de 0 ?

Propriété I.b.1 : Une fonction f admet au voisinage de $a \in I$ un développement limité à l'ordre n si et seulement si la fonction $g: h \mapsto f(a+h)$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n . On a de plus :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \Leftrightarrow g(h) = f(a+h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

Application I.b.2 : Déterminer le $DL_3(2)$ de $f(x) = \frac{1}{x}$

Remarque : Souvent on omet de dire que l'on se situe en 0 lorsque l'on écrit $o(x^n)$, de la même façon que l'on omet de préciser en $+\infty$ lorsque l'on parle des suites :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{ou} \quad e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

c) Unicité du DL et conséquence

Propriété I.c.1 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Application I.c.2 : Si f est une fonction paire (resp impaire) admettant un $DL_n(a)$, alors la partie polynômiale de degré n du $DL_n(a)$ est paire (resp impaire).

Propriété I.c.3 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors f est du même signe que le premier terme non nul de son DL au voisinage de a .

Application I.c.4 : On pose :

$$f: \begin{cases}]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2 + x^3 - 5x^3 \sin(x) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\exists a > 0, \forall x \in]-a; a[, f(x) < 0$$

II) DL et dérivée n-ième

a) La formule de Taylor-Young

Propriété II.a.1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Application II.a.2 : Démontrer que :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Application II.a.3 : Démontrer que :

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

Application II.a.4 : Déterminer $DL_0(3)$ de $\sqrt{1+x}$.

b) Dérivabilité et DL_1

Propriété II.b.1 : f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a et :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x \rightarrow a}(x-a)$$

Application II.b.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - 1}{x} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

ATTENTION : Ce résultat ne se généralise pas à l'ordre supérieur.

Contre-exemple II.b.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

c) Comment trouver un DL ?

Remarque : La formule de Taylor-Young pourrait nous permettre de calculer des DL mais cela sous-entend de calculer les dérivées n-ième en a de la fonction, ce qui peut s'avérer difficile. Nous allons voir que l'on peut obtenir des DL avec des DL connus et simple.

Propriété II.c.1 (intégrations des DL) : Soit $n \in \mathbb{N}$, $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$, elle admet donc un DL_n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Alors f admet une primitive F qui admet un DL_{n+1} et :

$$F(x) = \mathbf{F(0)} + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$$

Application II.c.2 : Déterminer $DL_5(0)$ de $\ln(1+x)$

Application II.c.3 : Déterminer $DL_{2n+1}(0)$ de $\arctan(x)$

Propriété II.c.4 (Combinaison linéaire et produit) : Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{K}$ admettant un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \text{ et } g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

- Alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$ et :

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

- Le produit fg admet un $DL_n(a)$ et :

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} T_n(PQ) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

où $T_n(PQ)$ désigne la troncature du $DL_n(a)$ du polynôme

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k \right)$$

Application II.c.5 : Déterminer le $DL_3(0)$ de $sh(x)$.

Application II.c.6 : Déterminer le $DL_3(0)$ de $sh(x) - \sin(x)$

Application II.c.7 : Déterminer le $DL_3(0)$ de :

$$x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$$

Remarque : Soit $f: I \rightarrow J$ admettant un $DL_n(a)$ et $g: J \rightarrow I$ admettant un $DL_n(f(a))$. Alors $g \circ f$ admet un $DL_n(f(a))$.

Application II.c.8 : Déterminer $DL_4(0)$ de $(1+x)^x$.

Application II.c.9 : Déterminer $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$

Propriété II.c.10 : Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un $DL_n(a)$ et telle que $g(a) \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(a)$.

Application II.c.11 : Déterminer $DL_3(0)$ de $\tan(x)$.

III) Applications des développements limités

a) Pour déterminer un équivalent

Remarque : On peut se servir des DL_n pour déterminer un équivalent (premier terme non nul dans le DL_n).

Application III.a.1 : Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de :

$$x \mapsto \frac{\sin(2x) - \sin(x)\cos(x)}{(2x - \sin(x) - \tan(x))^2}$$

b) Pour déterminer une limite.

Remarque : On peut se servir des DL_n pour déterminer une limite.

Application III.b.1 : Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(x) - x \cos(x) - 2x}{\sin^5(x)}$$

c) Etude local d'une fonction

Remarque : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un $DL_n(a)$ $n \geq 2$. Alors on peut étudier la position relative de f et de sa tangente en regardant le premier terme non nul du $DL_n(a)$ de f .

Exemple III.c.1 : Etudier la position relative de $f(x) = e^x$ avec sa tangente en 0.

Exemple III.c.2 : Etudier la position relative de $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$ avec sa tangente en 0 (après avoir démontré que f était dérivable en 0) !!

d) Application à la recherche d'asymptotes

Définition : Soit $f:]a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet une asymptote oblique d'équation $(A_0): y = ax + b$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

On détermine l'équation de (A_0) grâce à un $DL_2(+\infty)$ de $\frac{f(x)}{x}$.

Exemple III.d.1 : Déterminer l'asymptote oblique en $+\infty$ de :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$