Fiche TD 18 : Analyse asymptotique

Partie A : Cas des fonctions

Exercice A.1 : Donner un équivalent simple des fonctions ci-dessous en 0 :

$a)\ f(x) = \dfrac{(1-e^x)\,sin(x)}{x^2+x^3} \quad b)\ f(x) = ln(cos(x))$

Exercice A.2 : Donner un équivalent simple des fonctions ci-dessous en 0 :

$a)\ f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \qquad b)\ g(x) = a^x - b^x\ (a \neq b) \quad c)\ f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{4}} - \sqrt[4]{1-x^2}$

Exercice A.3 : Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} ln(x) \times ln(1+ln(1+x))\,,\ \ b)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+tan(x))^{\frac{1}{sin(x)}} \quad c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xln(x)}{x^x-1} \quad d)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{ln(sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

$e)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tan(x)\,tan(2x) \quad f)\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\,tan(\pi x)\ g)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}\,ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)\ h)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(1+x)}{ln(x)}\right)^{xln(x)}$

Exercice A.4 : Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto x^x\ ;\ g: x \mapsto x^{f(x)};\ h: x \mapsto x^{g(x)}$$

Exercice A.5 : Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sin(x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cos(x)\, e^{\frac{1}{1-sin(x)}}$$

Partie B : Avec les suites

Exercices B.1 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\,;\ \ v_n = \frac{n^2+e^{-2n}+\sqrt{n^5}}{ln(2n)+2n-3}\,; w_n = \frac{ln(n^2+1)}{n^2+1}$$

Exercice B.2 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = ln(n+1) - ln(n)\,; v_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\,;\ w_n = \sum_{k=0}^{n} k!$$

Exercice B.3 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}\,; v_n = (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}; w_n = \frac{\left(cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2-1}$$

Exercice B.4 : Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant :

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

a) Montrer que la suite converge vers 0 et en donner un équivalent simple.
b) Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

Exercice B.5 : Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$lim\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \text{ avec } \ell < 1$$

1) Montrer que :

$$x_n \to 0$$

2) Soit $a > 0$. Montrer que :

$$a^n = o(n!)$$

3) Montrer que :

$$n! = o(n^n)$$

Exercice B.6 : Utiliser des équivalents pour calculer les limites :

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-x}\right)^n \qquad c)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$$

Exercice B7 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2};\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$

On pose de plus l'équation :

$$(E): tan(x) = x$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n
2) Déterminer la limite de x_n
3) Montrer que :

$$\frac{1}{n\pi}x_n \to 1$$

4) Montrer qu'il existe (x_n) qui converge vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$$

Partie C : Calcul de $\mathrm{DL_n(a)}$

Exercice C.1 : Déterminer $\mathrm{DL}_3(0)$ de :

$$f(x) = cos(x), g(x) = \sqrt{1+x}, h(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$$

Exercice C.2 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de :

$$f(x) = e^x\, arctan(x), g(x) = \frac{sin^2(x)}{x^2}, h(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

Exercice C.3 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de :

$$f(x) = cos^3(x), g(x) = e^{cos(x)}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right), h(x) = ln(1 + cos(x))$$

Exercice C.4 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de :

$$f(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{cos(x)}$$

Exercice C.5 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de tangente en utilisant la formule de Taylor-Young puis en utilisant les $\mathrm{DL}_3(0)$ de sin et cos.

Exercice C.6 : Calculer les développement limités suivants :
1) $f: x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
2) $f: x \mapsto \ln(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de e.
3) $f: x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.

Exercice C.7 : Déterminer $\mathrm{DL}_4(0)$ de :

$$\mathrm{F(x)} = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}^2} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{t}^2}}\mathrm{dt}$$

Partie D : Application des DL et des équivalents

Exercice D.1 : a) Donner un $\mathrm{DL}_{n+2}(0)$ de :

$$(1-e^x)^n$$

b) En déduire :

$$S_{n,p}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p$$

Exercice D.2 : Déterminer les dérivées n-ième en 0 de :

$$f(x)=arcsin(x)$$

Exercice D.3 : Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{sin^2(x)}}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x+\sqrt{x^2+1})-ln(x+\sqrt{x^2-1})}{ln^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}\qquad e)\ \lim_{x\to+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}\qquad f)\ \lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x^x-a^x}$$

Exercice D.4 : On pose :

$$f:x\mapsto\frac{-1+\cos(x)+xsin(x)}{x^2}$$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2) Démontrer que f peut être prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est derivable en 0.
3) Montrer que f admet un extremum local en 0.

Exercice D5 : On pose :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\},f(x)=\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}$$

Montrer que f peut être prolongé par une fonction de clase $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice D6 : On pose :

$$f:x\mapsto\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

1) Déterminer $DL_2(f)$ en 0.
2) En déduire la tangente de $\mathcal{C}_f$ en 0 et sa position relative par rapport à la courbe.
3) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$.