

Correction fiche TD 18 : Analyse asymptotique

Partie A : Cas des fonctions

Exercice A.1 : Donner un équivalent simple des fonctions ci-dessous en 0 :

a) $f(x) = \frac{(1 - e^x) \sin(x)}{x^2 + x^3}$ b) $f(x) = \ln(\cos(x))$

On sait que :

$$1 - e^x \underset{0}{\sim} -x, \sin(x) \underset{0}{\sim} x, x^2 + x^3 \underset{0}{\sim} x^2$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - e^x) \sin(x)}{x^2 + x^3} &\underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2 + x^3} \\ \Rightarrow \frac{(1 - e^x) \sin(x)}{x^2 + x^3} &\underset{0}{\sim} -1 \end{aligned}$$

On peut aussi écrire que :

$$\frac{(1 - e^x) \sin(x)}{x^2 + x^3} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

2) On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x) - 1} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Exercice A.2 : Donner un équivalent simple des fonctions ci-dessous en 0 :

a) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ b) $g(x) = a^x - b^x$ ($a \neq b$) c) $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{4}} - \sqrt[4]{1 - x^2}$

a) On sait d'après l'équation de la tangente de $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x}$ que :

$$1 - \sqrt{1 - x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x$$

On a donc :

$$1 - \sqrt{1 - x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (par continuité de la racine carrée)} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}|x|$$

b) On sait que :

$$a^x - b^x = a^x \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^x \right) = a^x \left(1 - e^{x \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)$$

Or on sait que :

$$1 - e^x \underset{0}{\sim} -x$$

De plus on sait que :

$$a^x \underset{0}{\sim} 1$$

On en déduit donc que :

$$a^x - b^x \underset{0}{\sim} -x \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) On sait d'après le taux de variation que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}} - (1-x)^{\frac{1}{4}}}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$(1+x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2)^{\frac{1}{4}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$$

Exercice A.3 : Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \times \ln(1 + \ln(1 + x)), \quad & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{x^x - 1} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \tan(2x) \quad & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \quad & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)} \end{aligned}$$

a) On sait que :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

On en déduit donc que :

$$\ln(1 + \ln(1 + x)) \underset{0}{\sim} \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x) \times \ln(1 + \ln(1 + x))] = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

b) On a :

$$(1 + \tan(x))^{1/\sin(x)} = e^{\frac{1}{\sin(x)} \times \ln(1 + \tan(x))}$$

On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$$

On a donc :

$$\ln(1 + \tan(x)) \underset{0}{\sim} \tan(x)$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)} \times \ln(1 + \tan(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)} \times \tan(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

On en déduit donc par composée que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan(x))^{1/\sin(x)} = e$$

c) On a :

$$\frac{x \ln(x)}{x^x - 1} = \frac{\ln(x)}{e^{x \ln(x)} - 1}$$

On sait que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \\ e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \end{cases}$$

On a donc :

$$x^x - 1 \underset{0}{\sim} x \ln(x)$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{x^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{x \ln(x)} = 1$$

d) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x)^2 = 1 - \cos^2(x)$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}{X^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - X\right)\right)}{X^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(X))}{X^2} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \Rightarrow \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$$

On a donc :

$$\ln(1 - \sin^2(X)) \underset{0}{\sim} -\sin^2(X) \underset{0}{\sim} -X^2$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(X))}{X^2} &= -1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} &= -1 \end{aligned}$$

e) On a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \times \tan(2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{2} - X\right) \tan(\pi - 2X) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(X)}{\sin(X)} \tan(-2X)$$

Or on sait que :

$$\tan(x) \underset{0}{\sim} x \text{ et } \sin(x) \underset{0}{\sim} x$$

On a donc :

$$\frac{\cos(X)}{\sin(X)} \tan(-2X) \underset{0}{\sim} -\frac{2X}{X} \underset{0}{\sim} -2$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \times \tan(2x) = -2$$

f) On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1)(x - 1) \tan(\pi x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1) \tan(\pi x) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} 2X \tan\left(\pi \left(\frac{1}{2} - X\right)\right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} 2X \times \frac{\cos(\pi X)}{\sin(\pi X)} \end{aligned}$$

On sait que :

$$\sin(\pi x) \underset{0}{\sim} \pi x$$

On a donc :

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} 2X \times \frac{\cos(\pi X)}{\sin(\pi X)} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) = \frac{1}{\pi}$$

g) On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \\ &\Rightarrow \sqrt{4x+1} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \times \sqrt{4x+1} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \times \sqrt{4x+1} &= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \times \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = -2 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) = -2 \end{aligned}$$

h) On a :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)} = e^{x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)}$$

On sait que :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} &= 0 \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) &= \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Or on sait que :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)} = e$$

Exercice A.4 : Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto x^x ; g: x \mapsto x^{f(x)} ; h: x \mapsto x^{g(x)}$$

On a :

$$x^x = e^{x \ln(x)}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

Donc par composée on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

On a donc :

$$\frac{x^{f(x)}}{x} = x^{e^{x \ln(x)}} = e^{\ln(x) e^{x \ln(x)}}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x} = 0$$

Enfin on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^{(x^x)}} = 1$$

Exercice A.5 : Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de :

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1$$

On a :

$$\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x + 1 = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} - (x - 1)$$

Sur $]0; +\infty[$ on a :

$$\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} - (x - 1) = x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1 \right) + 1$$

Or on sait que :

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} x$$

On en déduit donc que :

$$x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1 \right) + 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{5}{2}$$

On a de même sur $] -\infty; 0[$:

$$\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} - (x - 1) = x \left(-\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1 \right) + 1$$

Or on sait que :

$$-\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} -2 - \frac{1}{2} x$$

On a donc :

$$x \left(-\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1 \right) + 1 \underset{+\infty}{\sim} -2x$$

Exercice A.6 : Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\frac{1}{1-\sin(x)}}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{-\frac{1}{x}}$$

De plus on a :

$$\cos(x)^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x} \ln(\cos(x))}$$

On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{-\sin(0)}{\cos(0)} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = 1$$

De même on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\frac{1}{1-\sin(x)}} &= \lim_{X \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)^{\frac{1}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-X\right)}} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \sin(X)^{\frac{1}{1-\cos(X)}} \end{aligned}$$

On sait de plus que :

$$\sin(X)^{\frac{1}{1-\cos(X)}} = e^{\frac{1}{1-\cos(X)} \ln(\sin(X))}$$

De plus on a :

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(X)}{X^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(X))(1 + \cos(X))}{2X^2} = \frac{1}{2} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin^2(X)}{X^2} = \frac{1}{2}$$

On a donc :

$$\frac{1}{1 - \cos(X)} \ln(\sin(X)) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(\sin(X))}{2X^2}$$

Or on sait que :

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin(X))}{2X^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 \ln\left(\sin\left(\frac{1}{X}\right)\right) = -\infty \text{ (croissance comparée)}$$

Donc on a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\frac{1}{1-\sin(x)}} = 0$$

Partie B : Avec les suites

Exercices B.1 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}; \quad v_n = \frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}; \quad w_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1}$$

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Donc :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2) On a :

$$\frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3} \sim \frac{n \sqrt{n}}{2}$$

En effet :

$$\frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3} = \frac{n^2 \sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{e^{-2n}}{n^2 \sqrt{n}} + 1 \right)}{2n \left(\frac{\ln(2n)}{2n} + 1 - \frac{3}{n} \right)}$$

Or on a :

$$\lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{e^{-2n}}{n^2 \sqrt{n}} + 1 \right) = 1 = \lim_n \left(\frac{\ln(2n)}{2n} + 1 - \frac{3}{n} \right)$$

C'est la croissance comparée.

On a donc :

$$\frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3} \sim \frac{n \sqrt{n}}{2}$$

c) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = \frac{\ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2 \ln(n)}{n^2} \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0$$

On a donc :

$$\frac{\ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1} \sim \frac{2 \ln(n)}{n^2}$$

Exercice B.2 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n); v_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}; w_n = \sum_{k=0}^n k!$$

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{0} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Donc :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

On en déduit donc que :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \sim 1$$

c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n k! = 1 + 2 + \dots + n! = n! \left(\frac{1}{n!} + \frac{2}{n!} + \dots + \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + 1 \right)$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \frac{1}{n!} + \frac{2}{n!} + \dots + \frac{(n-2)!}{n!} \leq (n-2) \frac{(n-2)!}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, w_n = \sum_{k=0}^n k! = 1 + 2 + \dots + n! \leq n! \left(\frac{2}{n} + 1 \right)$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n \left(\sum_{k=0}^n k! \right) \times \frac{1}{n!} = 1$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^n k! \sim n!$$

Exercice B.3 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}; v_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}; w_n = \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^2 - 1}$$

a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{\sqrt{n+1}} = n^{\sqrt{n} \times \sqrt{1+\frac{1}{n}}} \text{ et } (n+1)^{\sqrt{n}} = n^{\sqrt{n}} \times \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} = \frac{n^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}}} = \frac{e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \ln(n)}}{e^{\sqrt{n} \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \ln(n) - \sqrt{n} \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &= \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} \\ &= e^{\sqrt{n+1} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n+1)} \\ &= e^{\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} \ln(n) - \ln(n+1) \right)} \\ &= e^{\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} \ln(n) - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \right)} \\ &= e^{\sqrt{n} \ln(n) \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right) - \sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{\sqrt{n} \ln(n) \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right)} \times e^{-\sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \right)} \times e^{-\sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \right) = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$

Par croissance comparée on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{n} \ln(n) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)} = 1$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

On a donc :

$$\lim_n u_n = 1$$

Donc :

$$\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} \sim 1$$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(2^n + 3^n)} = e^{\frac{1}{n} \ln(3^n) + \frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)} = 3 \times e^{\frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{\ln \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)}{\left(\frac{2}{3} \right)^n} = 1 \text{ car } \frac{2}{3} \in [0; 1[$$

On a donc :

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) = \lim_n \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \text{ par croissance comparée}$$

On a donc :

$$\lim_n v_n = 3$$

Donc :

$$(2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \sim 3$$

c) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{\left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^2 - 1}$$

On sait que :

$$\lim_n \frac{\left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right)}{\frac{-1}{2n}} = 1$$

On sait de plus que :

$$\lim_n \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

On a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^2 - 1 = \frac{1}{n^2} \times \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - 1} = \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

On a donc :

$$\frac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} \sim -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} \sim -\frac{1}{4}$$

Donc :

$$\frac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - 1} \sim -\frac{1}{4}$$

Exercice B.4 : Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant :

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

- a) Montrer que la suite converge vers 0 et en donner un équivalent simple.
 b) Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

a) **1^{er} cas : Si (u_n) converge.**

On pose :

$$\lim_n u_n = \ell$$

Comme la suite (u_n) décroît, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \ell$$

On pose la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} + u_n$$

On a donc :

$$\lim_n v_n = 2\ell \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_n > 2\ell$$

Si $\ell > 0$ on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 2\ell \Rightarrow nv_n > 2\ell n$$

Or

$$\lim_n nv_n = 1 \text{ et } \lim_n 2\ell n = +\infty$$

Cela est impossible.

De même si :

Si $\ell < 0$ on a alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, v_n < 0$$

Or

$$\lim_n nv_n = 1$$

Cela est impossible.

Donc $\ell = 0$

2^{ième} cas : (u_n) diverge.

On sait que (u_n) est décroissante divergente donc :

$$\lim_n u_n = -\infty$$

Donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_n < 0$$

Donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_n + u_{n+1} < 0$$

Or :

$$\lim_n n(u_n + u_{n+1}) = 1$$

Cela est impossible.

On en déduit donc que :

(u_n) une suite décroissante vérifiant :

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_n u_n = 0$$

On veut montrer que :

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2nu_n$$

On sait que (u_n) est décroissante. On a donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &\leq u_n \leq u_{n+1} \\ \Rightarrow n(u_{n+1} + u_n) &\leq 2nu_n \leq n(u_{n-1} + u_n) \end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_n n(u_{n+1} + u_n) = \lim_n (n-1)(u_{n-1} + u_n) \times \lim_n \frac{n}{n-1} = 1$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim 2nu_n = 1$$

Donc :

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

b) On pose :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{2n}$$

On a alors :

$$u_{2n} \rightarrow 1 \text{ et } u_{2n+1} \rightarrow -1$$

Donc la suite (u_n) diverge car elle a deux valeurs d'adhérence distinctes.

De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+1} &= \frac{1}{2n} + (-1)^n + \frac{1}{2(n+1)} + (-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\lim_n n(u_n + u_{n+1}) = \lim_n \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Donc :

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

Exercice B.5 : 1) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \text{ avec } \ell < 1$$

1) Montrer que :

$$x_n \rightarrow 0$$

2) Soit $a > 0$. Montrer que :

$$a^n = o(n!)$$

3) Montrer que :

$$n! = o(n^n)$$

1) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs. On a :

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \text{ avec } \ell < 1$$

On en déduit donc que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

Donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < x_n \text{ car } x_n > 0$$

Donc la suite (x_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell' \in \mathbb{R}^+$.

➤ **Si $\ell' > 0$**

On a alors :

$$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\ell'}{\ell'} = 1$$

Impossible.

Donc $\ell' = 0$

Donc la suite (x_n) tend vers 0.

2) Soit $a > 0$. On veut calculer :

$$\lim_n \frac{a^n}{n!}$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n}{n!}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$$

D'après la question a), on en déduit que :

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$$

Donc :

$$a^n = o(n!)$$

c) On fait de même :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{n!}{n^n}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)}$$

Or on sait que :

$$\ln\left(1 + \frac{-1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

On a donc :

$$n \ln\left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right) \sim -\frac{n}{n+1}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n n \ln\left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right) = -1$$

Par composée on en déduit donc que :

$$\lim_n e^{n \ln\left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)} = \frac{1}{e}$$

Or on sait que $e^{-1} < 1$.

D'après la question a on en déduit que :

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

On a donc bien :

$$n! = o(n^n)$$

Exercice B.6 : Utiliser des équivalents pour calculer les limites :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n-x}\right)^n \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7}\right)^n$$

a) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}$$

On sait que :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

On en déduit donc que :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$$

On a donc :

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \Rightarrow \lim_n n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$$

Par composé on en déduit donc que :

$$\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

b) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{n}{n-x}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{n}{n-x}\right)} = e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n-x}\right)}$$

On sait que :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

On en déduit donc que :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n-x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n-x}$$

On a donc :

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n-x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{nx}{n-x} \Rightarrow \lim_n n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{nx}{n-x} = x$$

Par composé on en déduit donc que :

$$\lim_n \left(\frac{n}{n-x}\right)^n = e^x$$

c) On sait que :

$$\left(\frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7}\right)} = e^{n \ln\left(1 + \frac{8n-3}{n^2 - 3n + 7}\right)}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{8n-3}{n^2 - 3n + 7} = 0$$

On a donc :

$$\ln\left(1 + \frac{8n-3}{n^2 - 3n + 7}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{8n-3}{n^2 - 3n + 7} \Rightarrow n \ln\left(1 + \frac{8n-3}{n^2 - 3n + 7}\right) = \frac{8n^2 - 3n}{n^2 - 3n + 7}$$

On a donc :

$$\lim_n \frac{8n^2 - 3n}{n^2 - 3n + 7} = 8$$

Par composé on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7}\right)^n = e^8$$

Exercice B.7 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \left] n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$$

On pose de plus l'équation :

$$(E): \tan(x) = x$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n

2) Déterminer la limite de x_n

3) Montrer que :

$$x_n \sim \frac{1}{n\pi}$$

4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n: \begin{cases} \left] n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) - x \end{cases}$$

On sait que $f_n \in \mathcal{C}^1(I_n)$ et :

$$\forall x \in I_n, f'_n(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \tan^2(x) \geq 0$$

On en déduit donc que (f_n) est croissante.

De plus on sait que $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) = 0 \\ x \in I_n \end{cases} \Leftrightarrow x = n\pi$

On en déduit donc que f_n est strictement croissante sur I_n .

De plus on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n\pi - \frac{\pi}{2} \\ x > n\pi - \frac{\pi}{2}}} f_n(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2} \\ x < n\pi + \frac{\pi}{2}}} f_n(x) = +\infty$$

On a le tableau de variation suivant :

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$	$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$f'_n(x)$	+	
f_n	$-\infty$	$+\infty$

On a donc f_n est :

_ continue sur I_n

_ strictement croissante sur I_n

_ Change de signe sur I_n

Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$

On en déduit donc que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n .

2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq n\pi - \frac{\pi}{2}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = +\infty$$

On en déduit donc par comparaison que :

$$\lim_n x_n = +\infty$$

3) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\pi + \frac{\pi}{2} \geq x_n \geq n\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{2n} \geq \frac{x_n}{n\pi} \geq 1 - \frac{1}{2n}$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \lim_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n \frac{x_n}{n\pi} = 1 \Rightarrow x_n \sim n\pi$$

4) On sait que $\tan$ est π -périodique. On a donc :

$$\tan\left(x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos(x_n)}{\sin(x_n)} = -\frac{1}{\tan(x_n)}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tan(x_n) = x_n$$

On en déduit donc que :

$$\tan\left(x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{x_n}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\pi + \frac{\pi}{2} > x_n > n\pi - \frac{\pi}{2}$$

Or on a : $\tan(n\pi) = 0$ et $\tan(x_n) = x_n > 0$ donc on a : $\tan(x_n) > \tan(n\pi)$

Comme $\tan$ est croissante sur I_n on en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \arctan\left(\tan\left(x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \arctan\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

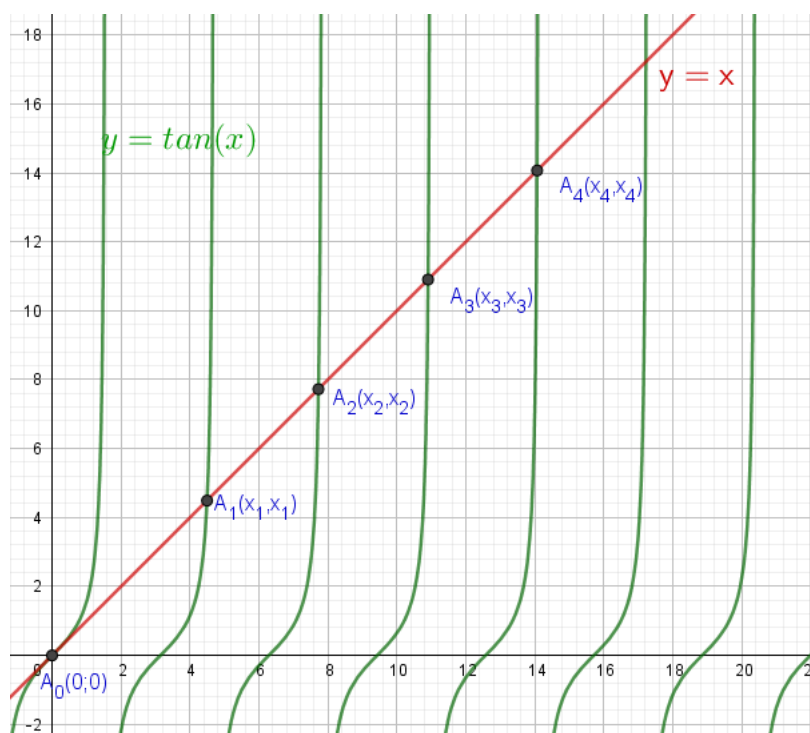
Comme $\arctan(u) \underset{0}{\sim} u$, on en déduit donc par composée que :

$$x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sim -\frac{1}{x_n} \text{ (car } x_n \rightarrow +\infty)$$

On a donc d'après la question précédente :

$$x_n - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sim -\frac{1}{n\pi}$$

On peut faire apparaître les premiers éléments de la suite (x_n) sur le graphe suivant :



Partie C : Calcul de $DL_n(a)$

Exercice C.1 : Déterminer $DL_3(0)$ de :

$$f(x) = \cos(x), g(x) = \sqrt{1+x}, h(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$$

a) On a :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

c) On a :

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-3x+3x^2-x^3}$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{1-3x+3x^2-x^3} \\ &= \frac{1}{1-(3x-3x^2+x^3)} \\ &= 1 + (3x-3x^2+x^3) + (3x-3x^2+x^3)^2 + (3x-3x^2+x^3)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + (3x-3x^2+x^3) + (9x^2-18x^3+o(x^3)) + 27x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Exercice C.2 : Déterminer le $DL_4(0)$ de :

$$f(x) = e^x \arctan(x), g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}, h(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

a) Il faut faire le DL à l'ordre 3 de l'exponentielle et à l'ordre 4 de l'arctan car $\arctan(0) = 0$.

On sait que :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

On sait de plus que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + o(x^3) \\ \Rightarrow \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e^x \arctan(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\ &\Rightarrow e^x \arctan(x) = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

b) Il faut faire un développement limité à l'ordre 6 de $\sin^2(x)$

On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(x)}{x^2} &= \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)}{x^2} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \\ &\Rightarrow \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

c) On doit faire un DL à l'ordre 6 du numérateur. On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

De même on a :

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 - \frac{21}{16}x^6 + o(x^6)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &\frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} \\ &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 - \frac{21}{16}x^6 + o(x^6)\right)}{x^2} \\ &\Rightarrow \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{15}x^3 + \frac{473}{360}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Exercice C.3 : Déterminer le $DL_6(0)$ de :

$$f(x) = \cos^3(x), g(x) = e^{\cos(x)}, h(x) = \ln(1 + \cos(x))$$

a) On sait que :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \\ \Rightarrow \cos^2(x) &= \cos(x) \times \cos(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{48} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6) \\ \Rightarrow \cos^3(x) &= \left(1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{24} + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6) \\ &\Rightarrow \cos^3(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{61}{240}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

b) On sait que :

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)} \\ &= e \times e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)} \\ &= e \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^3 + \frac{1}{24} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{120} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^5 + \frac{1}{720} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^6 \right) + o(x^6) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^2 = \frac{x^4}{4} \left(-1 + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{12} + o(x^6)$$

De même :

$$\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^3 = -\frac{x^6}{8} + o(x^6)$$

Enfin :

$$\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^4 = o(x^6) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^5$$

Et :

$$\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^6 = o(x^6)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{24} - \frac{x^6}{48} \right) + o(x^6) \\ &\Rightarrow e^{\cos(x)} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 - \frac{23e}{360}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

c) On sait que :

$$h(x) = \ln(1 + \cos(x)) = \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^6}{1440} + o(x^6)\right)$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \\ \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^6}{1440} + o(x^6)\right) &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{1440} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{1440}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{1440}\right)^3 + o(x^6) \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{1440} + \frac{x^4}{32} - \frac{x^6}{192} + \frac{x^6}{192} + o(x^6) \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} + \frac{x^6}{1440} + o(x^6) \end{aligned}$$

On a donc :

$$h(x) = \ln(1 + \cos(x)) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} + \frac{x^6}{1440} + o(x^6)$$

Exercice C.4 : Déterminer le $DL_3(0)$ de :

$$f(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{\cos(x)}$$

Il faut faire un DL à l'ordre 3 du numérateur et du dénominateur :

$$(1-x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$$

De même :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \Rightarrow \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{\cos(x)} &= \frac{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3) \\ &\Rightarrow \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

Exercice C.5 : Déterminer le $DL_5(0)$ de tangente en utilisant la formule de Taylor-Young puis en utilisant les $DL_3(0)$ de sin et cos.

Il faut dériver 5 fois tangente puis prendre les valeurs en 0. Comme Tangente est impaire, on sait que le DL de tangente sera impaire !

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(x) \\ \Rightarrow f'(x) &= 1 + \tan^2(x) = 1 + f^2(x) \Rightarrow f'(0) = 1 \\ \Rightarrow f''(x) &= 1 + 2(\tan^2(x) + 1) \tan(x) = 2f'(x)f(x) \Rightarrow f''(0) = 0 \\ \Rightarrow f^{(3)}(x) &= 2f''(x)f(x) + 2f'(x)^2 \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2 \end{aligned}$$

De même on a :

$$f^{(4)}(x) = 2f^{(3)}(x)f(x) + 2f''(x)f'(x) + 4f'(x)f''(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

Enfin on a :

$$f^{(5)}(0) = 8f^{(4)}(0)f'(0) = 16$$

On en déduit donc d'après la formule de Taylor-Young que :

$$f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

On peut aussi écrire que :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^5) \right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + o(x^5) \right)$$

$$\Rightarrow \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Exercice C.6 : Calculer les développements limités suivants :

- 1) $f: x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
- 2) $f: x \mapsto \ln(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de e .
- 3) $f: x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.

a) Il suffit de se ramener à 0 :

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - X\right) = \frac{1}{2}\cos(X) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(X)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4} + o(X^4)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)\right)$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

b) On sait que :

$$\ln(x) = \ln(e - X) = 1 + \ln\left(1 - \frac{X}{e}\right) = 1 + \frac{X}{e} + \frac{1}{2} \times \frac{X^2}{e^2} + \frac{1}{3} \times \frac{X^3}{e^3} + \frac{1}{4} \times \frac{X^4}{e^4} + o(X^4)$$

$$\Rightarrow \ln(x) = 1 - \frac{1}{e}(x - e) + \frac{1}{2e^2}(x - e)^2 - \frac{1}{3e^3}(x - e)^3 + \frac{1}{4e^4}(x - e)^4 + o((x - e)^4)$$

c) On a :

$$e^x = e^{1-X} = e^1 \times e^{-X} = e \left(1 - X + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{24}X^4 \right) + o(X^4)$$

$$\Rightarrow e^x = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{6}(x - 1)^3 + \frac{e}{24}(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$$

Exercice C.7 : Déterminer $DL_4(0)$ de :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

Il faut utiliser Taylor-Lagrange :

On sait que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow F'(0) = -1$$

De même on a :

$$F''(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{4x^4}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow F''(0) = 2$$

On fait de même avec $F^{(3)}$ et $F^{(4)}$ et on obtient :

$$F^{(3)}(0) = 1$$

$$F^{(4)}(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Partie D : Application des DL

Exercice D.1 : a) Donner un $DL_{n+2}(0)$ de :

$$(1 - e^x)^n$$

b) En déduire :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

a) On sait que :

$$\begin{aligned} (1 - e^x)^n &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^n \\ &= (-x)^n \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^n \\ &= (-x)^n \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^k \\ &= (-x)^n \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{2} \right)^k \left(1 + \frac{x}{3} + o(x) \right)^k \\ &= (-1)^n x^n \left(1 + n \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right) + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{x^2}{4} \right) + o(x^2) \right) \\ &= (-1)^n x^n + n \frac{(-1)^n}{2} x^{n+1} + \frac{3n^2 + n}{24} (-1)^n x^{n+2} + o(x^{n+2}) \end{aligned}$$

b) On sait que :

$$(1 - e^x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{kx}$$

Pour être plus « propre » dans la rédaction on pose :

$$f_n(x) = (1 - e^x)^n \text{ et } g_k(x) = e^{kx}$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, f_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (g_k)^{(p)}(x)$$

Or on démontre par une récurrence immédiate que :

$$(g_k)^{(p)}(x) = k^p e^{kx}$$

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, f_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p e^{kx} \Rightarrow \forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, f_n^{(p)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$$

Or on sait que :

$$\forall p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, f_n^{(p)}(0) = 0$$

Car on a le développement limité à l'ordre $n+2$ de f_n et ce dernier commence avec x^n !
De plus on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n n!$$

On peut même en déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^{n+1} = n \frac{(-1)^n}{2} (n+1)!$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^{n+2} = \frac{3n^2 + n}{24} (-1)^n (n+2)!$$

Exercice D.2 : Déterminer les dérivées n -ième en 0 de :

$$f(x) = \arcsin(x)$$

On pose :

$$f(x) = \arcsin(x)$$

On peut faire un $DL_n(0)$ de $\arcsin$.

On sait déjà que $\arcsin$ est impaire donc on peut en déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k)}(0) = 0$$

On pose :

$$f(x) = \arcsin(x)$$

On a donc :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

On cherche le DL_n de $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

On pose :

$$g: x \mapsto (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

On sait que $g \in \mathcal{C}^\infty \left(\left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[\right)$ et :

$$g'(x) = \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{3}{2}}, g''(x) = \frac{3}{4} (1-x)^{-\frac{5}{2}}, g'''(x) = \frac{3 \times 5}{2^3} (1-x)^{-\frac{7}{2}}$$

Une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g^{(n)}(x) = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^k + o(x^n)$$

On a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n})$$

On a donc :

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \text{ car } \arcsin(0) = 0$$

$$\Rightarrow \arcsin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)! (2k+1)!}{2^{2k} (k!)^2 (2k+1) (2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \arcsin^{(2n+1)}(0) = \frac{((2n)!)^2}{2^{2n} (n!)^2} = \left(\frac{(2n)!}{2^n n!} \right)^2$$

Exercice D.3 : Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) \quad & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \quad & c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} \\ d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \quad & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}} \quad & f) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^x} \end{aligned}$$

a) On a :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} + o(1) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

b) On a :

$$x(e^x + 1) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

De même :

$$2(e^x - 1) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} &= \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} + o(1) = \frac{1}{6} + o(1) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

c) On a :

$$\left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = e^{\frac{1}{\sin^2(x)} \times \ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)}$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \right) = \frac{1}{x^2} \times \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \right)$$

De plus :

$$\frac{\tan(x)}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

On a donc :

$$\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

On a donc :

$$\frac{1}{\sin^2(x)} \times \ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = e^{\frac{1}{3}}$$

d) On a :

$$\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} = \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}{\ln^2\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)}$$

On sait que :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

De même on a :

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) &= \ln\left(2 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \ln\left(2 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\ln^2\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \frac{4}{(x-1)^2} + o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{4}{(x-1)^2} + o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)} = \frac{1}{8}$$

e) On a :

$$\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} &= x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} - \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} = e^{\left(\frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ln\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)}$$

De plus on sait que :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e - e \times e^{-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= e \left(1 - e^{-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}\right) \end{aligned}$$

De plus on a :

$$e^{e^{-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}} = 1 + \left(-\frac{1}{2x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc :

$$e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

On a donc :

$$\ln\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = 1 + \ln\left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

On a donc :

$$\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} = e^{\left(\frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \ln\left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)}$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{3}{2x} + \frac{3}{2x} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x \ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Or on sait que :

$$\lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x \ln\left(\frac{x}{2}\right)} = e^0 = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} = 1$$

f) Soit $a > 0$. On cherche :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^x} = 1 - \ln(a)}$$

Exercice D.4 : On pose :

$$f: x \mapsto \frac{-1 + \cos(x) + x \sin(x)}{x^2}$$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2) Démontrer que f peut être prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

3) Montrer que f admet un extremum local en 0.

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

2) Nous ferons la question 2 et 3 en même temps. Il faut faire au minimum un $DL_2(0)$ de f pour avoir la dérivabilité et la position de la tangente (ordre 2 si et seulement si ce dernier n'est pas unique, sinon nous n'avons aucune information sur la position). Donc au minimum un $DL_4(0)$ du numérateur :

$$-1 + \cos(x) + x \sin(x) = -1 + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - x \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4)$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{3}{2}$, ce prolongement est dérivable en 0 avec :

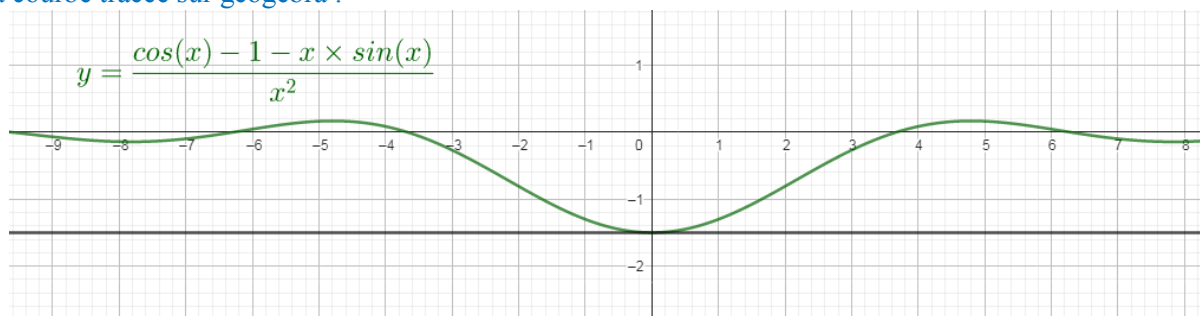
$$f'(0) = 0$$

De plus on a :

$$f(x) - T_0(x) = f(x) + \frac{3}{2} \approx \frac{5}{24}x^2$$

Donc $f(x) - \frac{3}{2}$ est du signe de $\frac{5}{24}x^2$ au voisinage de 0. On en déduit donc que C_f est au-dessus de sa tangente (qui est horizontale). Donc f admet un minimum local en 0.

Voici la courbe tracée sur géogebra :



Exercice D5 : On pose :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$$

Montrer que f peut être prolongé par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi; \pi[$.

On a :

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{x}{6} + o(x)$$

f admet donc un $DL_1(0)$ donc f est prolongeable par continuité en 0, ce prolongement est dérivable est $f'(0) = \frac{1}{6}$

Il reste à voir si :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{6}$$

Pour avoir un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\pi; \pi[\setminus \{0\}, f'(x) &= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sin^2(x) - x^2 \cos(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{6} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{6}$$

Donc ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi; \pi[$.

Remarque : On aurait pu juste faire un $DL_0(0)$ de f pour prouver le prolongement par continuité puis dériver f en dehors de 0 et ensuite utiliser le théorème de la limite-dérivée, autrement appelé théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ par Monsieur Lajugie ^^

Exercice D6 : On pose :

$$f: x \mapsto \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

- 1) Déterminer $DL_2(f)$ en 0.
- 2) En déduire la tangente de $\mathcal{C}_f$ en 0 et sa position relative par rapport à la courbe.
- 3) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$.

1) On a :

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} &= -x \times \frac{1}{1-x} \times \sqrt{1+x^2} = -x \times (1+x+x^2+o(x^2)) \left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) \\ &= (-x-x^2+o(x^2)) \left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = -x-x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

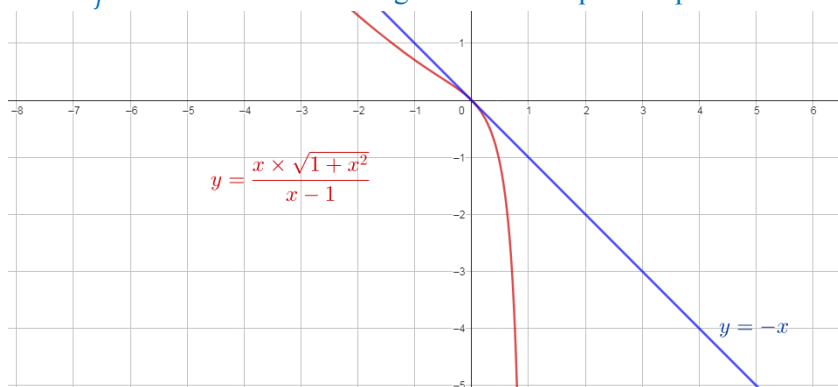
2) f admet un $DL_1(0)$ donc on a l'équation de la tangente en 0. On a :

$$T_{0,f}(x) = -x$$

De plus on a :

$$f(x) - T_{0,f}(x) \underset{0}{\sim} -x^2$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente en 0. Ce que l'on peut voir sur le graphique suivant :



3) On a :

$$\forall x > 1, f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = x \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$

Or on a :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

De même on a :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On a donc :

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc :

$$f(x) - (x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$$

On a donc $y = x + 1$ asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Remarque : Ici on en a fait plus que demandé ; On a la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote puisque :

$$f(x) - (x + 1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote en $+\infty$. On peut le voir sur le graphique suivant :

