

Chapitre 19 : Espace vectoriel

Partie A : Généralité

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Des espaces qui conservent les mêmes propriétés

a) Deux opérations : $(+; \cdot)$

Définition : Soit E un ensemble non vide. On dit que $+$ est une loi de composition interne si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$$

De même on dit que $\cdot$ (multiplication par un scalaire) est une loi de composition externe si et seulement si :

$$\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, \lambda \cdot x \in E$$

Exemple I.a.1 : Déterminer si dans les ensembles E suivants, les lois $+$ et $\cdot$ sont des lois de compositions.

$$E_1 = [0; 1], E_2 = \mathbb{C}^2, E_3 = M_n(\mathbb{R}), E_4 = GL_n(\mathbb{R}), E_5 = \mathbb{C}[X]$$

b) Espaces vectoriels

Définition : On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$ -e.v. ou e.v.) si :

- $+$ est une loi de **composition interne** sur E vérifiant :
 - $+$ est associative : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$
 - $+$ est commutative : $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$
 - $+$ admet un élément neutre : $\exists e \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
 - Tout élément de E admet un symétrique : $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = e$.

(On dit que $(E, +)$ est un groupe commutatif).

- La multiplication par un scalaire $\cdot$ est une loi de **composition externe** sur E vérifiant :
 - $\cdot$ est associative : $\forall (x, \lambda, \mu) \in E \times \mathbb{K}^2, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
 - $\cdot$ est distributive sur $\mathbb{K}$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
 - $\cdot$ est distributive sur $(E, +)$: $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
 - $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre pour $\cdot$: $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Remarque : L'ensemble des éléments λ de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

L'ensemble des éléments de E sont appelés des **vecteurs**.

Dans les espaces vectoriels, les vecteurs sont notés sans flèche !!

Propriété I.b.1 : L'élément neutre pour l'addition, noté 0_E , et le symétrique d'un élément x de E , noté $-x$, sont uniques.

Propriété I.b.2 : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On a :

- (1) $\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
- (2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow \begin{cases} x = 0_E \\ \text{ou} \\ \lambda = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$
- (3) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$
- (4) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$
- (5) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$

II) Espaces vectoriels de référence

a) $\mathbb{K}^n$

Remarque : Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ des vecteurs du plan et de l'espace forment un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Plus généralement on peut définir pour tout entier n non nul $\mathbb{R}^n$ avec les lois suivantes :

- L'addition :

$$\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

- Multiplication par un scalaire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Remarque : On peut définir de même $\mathbb{C}^n$

Propriété II.a.1 : Muni des lois précédentes, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où le vecteur nul $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)$.

b) Produit cartésien d'espace vectoriel

Propriété II.b.1 : Soit $(E_1, +, \cdot), \dots, (E_n, +, \cdot)$ n $\mathbb{K}$ -espaces vectoriel. On munit le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni des deux opérations suivantes :

- L'addition :

$$\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (E_1 \times \dots \times E_n)^2, (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

- Multiplication par un scalaire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Alors E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où $0_E = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$

Remarque : Si on pose $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, on retrouve $E = E_1 \times \dots \times E_n = \mathbb{K}^n$

c) L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Propriété II.c.1 : L'espace $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{n,p}$.

d) L'espace $\mathcal{F}(\Omega, E)$

Propriété II.d.1 : Soit Ω un ensemble non vide. L'ensemble des applications $f: \Omega \rightarrow E$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où :

$$0_{\mathcal{F}(\Omega, E)} : \begin{cases} \Omega \rightarrow E \\ \omega \mapsto 0_E \end{cases}$$

Remarque : En particulier l'ensemble des suites réelles (resp complexes) définie sur $\mathbb{N}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (resp $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) où le vecteur nul est la suite constante nulle.

e) L'espace $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$

Propriété II.e.1 : Les espaces $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où $0_{\mathbb{K}_n[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]}$ est le polynôme nul.

III) Sous-espaces vectoriels

a) Combinaison linéaire

Définition : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k$$

Exemple III.a.1 : Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mais pas de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple III.a.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos^3(x) \end{cases}$$

Montrer que f est combinaison linéaire de $(\cos(nx))_{0 \leq n \leq 3}$.

Définition : Soit X une partie de E . On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si x est combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs de X .

b) Sous-espace vectoriel

Définition : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si :

- (1) $F \neq \emptyset$
- (2) $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$

Exemple III.b.1 : $F=E$ et $F = \{O_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

Exemple III.b.2 : Soit n un entier naturel n . Montrer que :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X]; \deg(p) \leq n\}$$

Est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : Tout sous-espace vectoriel de E contient $\{O_E\}$.

Propriété III.b.3 : Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est stable par combinaison linéaire.

Propriété III.b.4 : Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Application III.b.6 : Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Application III.b.7 : Montrer que l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ convergentes est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

c) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition : Soit X une partie de E où $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Le sous-espace vectoriel engendré par X est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contiennent X , on le note $\text{vect}(X)$.

Exemple III.c.1 : Soit $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui contiennent X .

Propriété III.c.2 : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espace vectoriel de E . Alors :

$$\bigcap_{i \in I} F_i = F$$

Est un sous-espace vectoriel de E .

ATTENTION contre-exemple II.c.3 : La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

Propriété III.c.3 : Soit X une partie non vide de E . On a :

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{X \subset F \text{ sev de } E} F$$

Exemple III.c.4 : Déterminer $\text{vect} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \right)$

Propriété III.c.5 : Soit F une partie d'un espace vectoriel E .

(1) F est un sous-espace vectoriel $\Leftrightarrow \text{vect}(F) = F$

(2) $X \subset Y \Rightarrow \text{vect}(X) \subset \text{vect}(Y)$

Propriété III.c.6 : Soit X une partie non vide d'un espace vectoriel E . On a $\text{vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X .

Application III.c.7 : Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel et $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ une partie de E composée de n vecteurs. On a :

$$\text{vect}((e_1, \dots, e_n)) = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Application III.c.8 : On a :

$$\text{vect}((1, X, X^2, \dots, X^n)) = \mathbb{R}_n[X]$$

Application III.c.9 : Montrer que :

$$\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

Application III.c.10 : Déterminer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\} = \text{vect}((v_n)_{n \in \mathbb{N}}; (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

III) Somme des sous-espaces vectoriels

a) Définition

Définition : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On pose :

$$F + G = \{x + y; (x, y) \in E \times F\}$$

Propriété III.a.1 : $F + G$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Propriété III.a.2 : On a :

$$F + G = \text{vect}(F \cup G)$$

Exemple III.a.3 : On a :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (resp $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires (resp impaire).

b) Somme directe

Définition (somme directe) : On dit que F et G sont en somme directe si et seulement si :

$$\forall x \in F + G, \exists! (y, z) \in F \times G, x = y + z$$

On note alors $F \oplus G$.

Exemple III.b.1 : Montrer que :

$$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$$

Propriété III.b.2 (caractérisation des sommes directes) : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On a alors :

$$F \oplus G = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{O_E\}$$

Application III.b.3 : Montrer que :

$$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \oplus \text{vect}((1, 1, 1))$$

c) Supplémentaires

Définition : Soit E un ev et F et G deux sev de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$$E = F \oplus G$$

Remarque : On a :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! (y, z) \in F \times G, x = y + z \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{O_E\} \end{cases}$$

Exemple III.c.1 : Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \oplus \text{vect}((1, 1, 1))$$

Application III.c.2 : Montrer que :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Application III.c.3 : Montrer que :

$$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$$