

## Chapitre 19 : Espaces vectoriels

### Partie B : Famille finie de vecteurs

#### I) Familles libres et liées

##### a) Définition

**Définition** : Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On dit que la famille  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  est libre si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

**Exemple I.a.1** : Montrer que la famille suivante est libre dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

**Exemple I.a.2** : Montrer que la famille  $(\cos, \sin) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$  est libre dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

**Définition** : Si la famille  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

**Exemple I.a.3** : Montrer que la famille suivante est liée dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

**Remarque** : Deux vecteurs colinéaires sont toujours liés. Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre.

**Propriété I.a.4** : Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  une famille libre. Alors pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$  on a :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$$

##### b) Familles liées

**Définition** : Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $(x_1, x_2) \in E \setminus \{0_E\} \times E$  deux vecteurs de  $E$ . On dit que  $x_1$  et  $x_2$  sont colinéaires s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $x_1 = \lambda x_2$ .

**Propriété I.b.1** : Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  contenant  $0_E$  le vecteur nul. Alors la famille est liée.

**Propriété I.b.2** : La famille  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  est liée si et seulement s'il existe un vecteur  $x_{i_0} \in (x_1, \dots, x_n)$  tel que  $x_{i_0}$  s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

**Application I.b.3** : Montrer que la famille suivante est liée :

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

**Propriété I.b.4** : Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  une famille libre de  $E$  et  $x \in E$ . On a l'équivalence :

$$(x_1, \dots, x_n, x) \in E^{n+1} \text{ est liée} \Leftrightarrow x \in \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$$

**Propriété I.b.5 :** Toute sous-famille d'une famille libre est libre.  
Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

**Application I.b.6 :** Montrer que la famille suivante est liée :

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

### c) Polynômes échelonnées

**Définition :** Soit  $(P_0, P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}[X])^{n+1}$  une famille de polynômes rangée par ordre croissant de leur degré. On dit que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est échelonnée si et seulement si :

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$$

**Propriété I.c.1 :** Toute famille de polynômes échelonnée de polynômes non nuls  $(P_0, P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}[X])^{n+1}$  est libre.

**Application I.c.2 :** La famille  $(1, X - 3, X^3 - X^2)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}[X]$ .

## II) Famille génératrice

### a) On peut avoir tout le monde

**Définition :** On dit que la famille  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  est une famille génératrice de  $E$  si et seulement si :

$$\text{vect}(x_1, \dots, x_n) = E$$

Autrement dit :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

**Exemple II.a.1 :** Déterminer une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$

**Exemple II.a.2 :** Déterminer une famille génératrice de  $\mathbb{R}_n[X]$

**Exemple II.a.3 :** Démontrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

### b) Sur-famille d'une famille génératrice

**Propriété II.b.1 :** Soit  $G$  une famille de  $E$  et  $F$  une famille génératrice de  $E$ . On a alors  $G$  est une famille génératrice si et seulement si tout élément de  $F$  est combinaison linéaire d'éléments de  $G$ .

**Application II.b.2 :** Démontrer que :  $\left(1, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$  engendre le  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{C}$ .

## III) Bases

### a) Libre et génératrice

**Définition :** Une famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si elle est libre et génératrice.

**Exemple III.a.1 :** La famille  $(1, X, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Propriété III.a.2 :** Une famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si tout élément de  $E$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{B}$  :

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

**Définition (Coordonnées) :** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$  un élément de  $E$ .

- Alors le  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  s'appelle les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- On appelle matrice colonne de  $x$  en base  $\mathcal{B}$  et on note :

$$M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Application III.a.3 :** On pose :

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### b) Les bases canoniques

**Définition :** On appelle base canonique les bases qui sont « conformes à la norme », on peut dire également qui « tombent sous le sens ».

**Exemple III.b.1 :** La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$  avec :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i = \left( 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0 \right)$$

Par exemple :  $\mathcal{B}_c = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ .

**Exemple III.b.2 :** La base canonique de  $M_{n,p}(\mathbb{C})$  est  $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, \dots, E_{n,p})$  avec :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, E_{i,j} = (a_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}, a_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{si } (k, l) \neq (i, j) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple III.b.3 :** La famille  $(1, X, \dots, X^n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### c) Base et somme directe

**Propriété III.c.1 :** Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Soient  $(f_1, \dots, f_p) \in F^p$  et  $(g_1, \dots, g_q) \in G^q$  deux familles de vecteurs.

(1) Si  $(f_1, \dots, f_p)$  et  $(g_1, \dots, g_q)$  sont libres et que  $F+G$  est en somme directe alors  $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$  est une famille libre de  $F+G$ .

(2) Si  $(f_1, \dots, f_p)$  et  $(g_1, \dots, g_q)$  sont génératrices respectivement de  $F$  et  $G$  et  $E=F+G$  alors  $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$  est génératrice de  $E$ .

(3) Si  $(f_1, \dots, f_p)$  et  $(g_1, \dots, g_q)$  sont des bases respectivement de  $F$  et  $G$  et  $E=F \oplus G$  alors  $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$  est une base de  $E$ . On l'appelle **base adaptée** à la somme directe  $F \oplus G$ .

**Exemple III.c.2 :** On pose  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$  et  $G = \text{vect}\{(1,1,1)\}$ . Montrer que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$  puis en déduire une base adaptée à la somme directe  $F \oplus G$ .

**Propriété III.c.3 :** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, E = \text{vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$