Correction DM n°5

Cet exercice nous propose une démonstration du résultat suivant :

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On définit la suite de polynômes T_n par :

$$T_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right] \text{ où } i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

1) Calculer $T_0(X)\ et\ T_1(X)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \in \mathbb{R}[X]$$

3) Déterminer le degré de T_n.

4) a) Montrer que :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$$

b) En déduire le coefficient dominant de T_n

5) a) Rappeler les solutions de $z^n = 1$ sur $\mathbb{C}$.

b) Soit $\theta \in]0;\pi[$. Démontrer que :

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

c) En déduire que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

6) Montrer que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^2\right) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

7) a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(Indice : on pourra utiliser le coefficient de T_n en X^{2n-2} et le fait que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

8) a) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

b) En déduire un encadrement de :

$$\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \; pour\ 1 \leq k \leq n$$

c) En déduire que :

$$\zeta(2) = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1) On a :

$$\boldsymbol{T_0(X) = \frac{1}{2i}[X + i - X + i] = 1}$$

De même on a :

$$T_1(X) = \frac{1}{2i}[(X+i)^3 - (X-i)^3] = \frac{1}{2i}[X^3 + 3iX^2 - 3X - i - (X^3 - 3iX^2 - 3X + i)]$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2i}(6iX^2 - 2i) = 3X^2 - 1}$$

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{T_n(x)} = -\frac{1}{2i}\left((x-i)^{2n+1} - (x+i)^{2n+1}\right) = T_n(x)$$

Donc $T_n \in \mathbb{R}[X]$.

3) On a :

$$(X+i)^{2n+1} = X^{2n+1} + (2n+1)iX^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} i^{2n+1-k} X^k$$

De même on a :

$$(X-i)^{2n+1} = X^{2n+1} - (2n+1)iX^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} (-i)^{2n+1-k} X^k$$

On a donc :

$$(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} = 2(2n+1)iX^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} \left(i^{2n+1-k} - (-i)^{2n+1-k}\right) X^k$$

Donc on en déduit que :

$$\boldsymbol{\deg(T_n) = 2n}$$

4) a) On a :

$$T_n(X) = \frac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}] = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} \left(i^{2n+1-k} - (-i)^{2n+1-k}\right) X^k\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} \left(i^k - (-i)^k\right) X^{2n+1-k}\right)$$

De plus on a :

$$i^n - (-i)^n = e^{\frac{in\pi}{2}} - e^{-\frac{in\pi}{2}} = 2i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0\ si\ n\ pair \\ (-1)^k\ si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}}$$

b) On a :

$$T_n(X) = (2n+1)X^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$$

Ainsi le coefficient dominant est $2n+1$

5) a) On a :

$$\boldsymbol{z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]}$$

b) On a :

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z\left(1 - e^{i\theta}\right) = -i\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \Leftrightarrow -e^{\frac{i\theta}{2}} z \times 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = -2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

c) On a :

$$T_n(X) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{X+i}{X-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{X+i}{X-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}; k \in [\![1; 2n]\!]$$

Attention ici $\frac{X+i}{X-i} \neq 1$, donc on doit retirer la solution $k = 0$.

On obtient donc d'après la question précédente :

$$\boldsymbol{X = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)};\ k \in [\![1; 2n]\!]}$$

Vérifions que l'on a bien $2n$ racines !

On a :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

Donc on a n racines entre 0 et n (positive) car tan est bijective sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus :

$$\forall k \in [\![n+1; 2n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

Là encore on a n racines (négative) car tan $\quad est\ bijective\ sur\ \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

On a donc $2n$ racines pour T_n polynôme de degré $2n$.On a donc :

$$\boldsymbol{T_n(X) = (2n+1) \prod_{k=1}^{2n} \left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$$

6) On a :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\left(X + \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$
$$= \left[\prod_{k=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right] \times \left[\prod_{k=1}^{n} \left(X + \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right]$$

Or on sait que :

$$-\tan(\theta) = \tan(\pi - \theta)$$

On a donc :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(X + \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

On a donc :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(X+\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)=\prod_{k=n}^{2n}\left(X-\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

On en déduit donc que :

$$T_n(X)=(2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X-\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

7) a) On a :

$$T_n(X)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{2n-2k}$$

En pose $Y=X^2$ on obient :

$$P_n(Y)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(Y-\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}Y^{n-k}$$

On utilise ensuite le lien **coefficient-racine** pour le terme en Y^{n-1} :

$$-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=-\binom{2n+1}{3}=-\frac{(2n+1)!}{3!\,(2n-2)!}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

b) On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}-n$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{2n(n+1)}{3}$$

On sait que :

$$\forall\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\tan(\theta)=-\tan(-\theta$$

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\tan(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

8) a) On a :

$$\forall t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\cos(t)\le 1\le 1+\tan^2(t)\Rightarrow\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\int_0^x\cos(t)\ dt\le\int_0^x 1\ dt\le\int_0^x 1+\tan^2(t)\ dt$$

$$\Rightarrow\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\sin(x)\le x\le\tan(x)$$

b) On en déduit donc que :

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\le\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}\le\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{2n(n+1)}{3}\le\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le\frac{n(2n-1)}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{2n^2+2n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{2n^2-n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2$$

Or on a :

$$\lim_n \frac{2n^2+2n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6} = \lim_n \frac{2n^2-n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2$$

Cet exercice nous propose une démonstration du résultat suivant :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On définit la suite de polynômes T_n par :

$$T_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right] \text{ où } i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

1) Calculer $T_0(X)\ et\ T_1(X)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \in \mathbb{R}[X]$$

3) Déterminer le degré de T_n.

4) a) Montrer que :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{2n-2k}$$

b) En déduire le coefficient dominant de T_n

5) a) Rappeler les solutions de $z^n = 1$ sur $\mathbb{C}$.

b) Soit $\theta \in]0;\pi[$. Démontrer que :

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

c) En déduire que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

6) Montrer que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^2\right) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

7) a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(Indice : on pourra utiliser le coefficient de T_n en X^{2n-2} et le fait que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{2n-2k}=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{2n(n+1)}{3}$$

8) a) Montrer que :

$$\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\sin(x)\leq x\leq\tan(x)$$

b) En déduire un encadrement de :

$$\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}\ pour\ 1\leq k\leq n$$

c) En déduire que :

$$\zeta(2)=\lim_{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$