

DM n°5 bis

Soit f une fonction définie et continue sur $[-1; 1]$. On définit :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [-1; 1]} |f(x)|$$

Vous verrez l'an prochain que ce nombre est très important.

Partie A : Echauffement

1) On pose :

$$f: x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2} \text{ pour } x \in [-1; 1]$$

Déterminer $\|f\|_{\infty}$.

2) a) Justifier l'existence de $\|f\|_{\infty}$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([-1; 1])$.

b) Justifiez que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([-1; 1]), \exists c \in [-1; 1] \text{ tel que } \|f\|_{\infty} = |f(c)|$$

c) Si $f \in \mathcal{C}^1([-1; 1])$ et $c \in]-1; 1[$, déterminer $f'(c)$.

Nous allons à présent nous intéresser aux polynômes. On se place dans $\mathbb{R}[X]$. Dans toute la suite on confond le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec sa fonction polynomiale $\tilde{P}$ pour éviter une certaine lourdeur dans les notations.

3) a) Montrer que :

$$\|P\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

b) Démontrer que cela n'est plus vrai pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Partie B : Les polynômes de Tchebychev

Nous allons à présent montrer le théorème suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \Rightarrow \|P\|_{\infty} \geq \frac{|a_n|}{2^{n-1}} \text{ avec } a_n = CD(P)$$

Pour cela nous allons avoir besoin des polynômes de Tchebychev.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], T_n(x) = \cos(\arccos(x))$$

1) Déterminer T_0 et T_1 .

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in [-1; 1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale sur $[-1; 1]$.

c) Donner $T_2(X)$ et $T_3(X)$.

3) Déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

4) Déterminer la parité de T_n .

5) a) Démontrer que :

$$\forall \theta \in [0; \pi], T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

b) En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est scindé à racines simples puis déterminer les racines de T_n .

6) Montrer que $\|T_n\|_{\infty} = 1$.

Dans toute la suite on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

a) Montrer que V_n est unitaire.

b) Déterminer $\|V_n\|_{\infty}$.

Partie C : Minoration de $\|P\|_{\infty}$.

Dans cette partie on se donne $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et unitaire. On souhaite prouver que $\|P\|_{\infty} \geq 2^{1-n}$. Pour cela on va raisonner par l'absurde. On suppose que :

$$\|P\|_{\infty} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

- 1) Démontrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.
- 2) On pose :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

- a) Déterminer le signe de $(V_n - P)(x_k)$.
 - b) En déduire que $V_n = P$ puis conclure.
- 3) a) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \Rightarrow \|P\|_{\infty} \geq \frac{|a_n|}{2^{n-1}} \text{ avec } a_n = CD(P)$$

- b) De plus déterminer tous les polynômes P_n de degré n tel que :

$$\|P_n\|_{\infty} = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

Partie D : Une magnifique application

Dans cette partie nous allons nous intéresser à ce que l'on appelle une interpolation. On se donne $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1; 1])$ et $n + 1$ antécédents $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in [-1; 1]^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

On dit que P_n est le polynôme d'interpolation de f d'ordre $n + 1$ pour le $(n + 1) - \text{uplet}$ $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ si :

$$\begin{cases} P_n \in \mathbb{R}_n[X] \\ \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_n(a_i) = f(a_i) \end{cases}$$

On définit alors $d_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(P_n, f)$ la distance entre P_n et f par :

$$d_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(P_n, f) = \|P_n - f\|_{\infty}$$

Le but de cette partie étant de trouver un excellent $(n + 1) - \text{uplet}$ $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ pour f , c'est-à-dire tel que $d_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(P_n, f)$ soit majorée par une suite qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On verra que ce $(n + 1) - \text{uplet}$ est indépendant de f .

Cela est très utile en physique, notamment pour les éphémérides astronomiques où l'on a besoin de réajuster une régression par exemple.

- 1) On pose $f: x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2}$ pour $x \in [-1; 1]$. Déterminer $d_{(-1, 0, 1)}(P_2, f)$.
- 2) Démontrer que :
 $\forall (a_0, a_1, \dots, a_n) \in [-1; 1]^{n+1} \text{ avec } a_0 < a_1 < \dots < a_n, \exists ! P_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_n(a_i) = f(a_i)$

Dans toute la suite on pose :

$$S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(X) = \prod_{k=0}^n (X - a_k)$$

De plus on pose $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_n(a_i) = f(a_i)$$

Enfin on pose :

$$\phi_{\lambda}: x \mapsto f(x) - P_n(x) - \lambda S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)$$

- a) Démontrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exists t_{\lambda} \in [-1; 1] \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \text{ tel que } \phi_{\lambda}(t_{\lambda}) = 0$$

- b) Montrer que ϕ_{λ} s'annule $n + 2$ fois sur $[-1; 1]$.
- c) En déduire que $\phi_{\lambda}^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1; 1]$.
- d) Déterminer $\phi_{\lambda}^{(n+1)}$ en fonction de $f^{(n+1)}$, n et λ .
- e) En déduire qu'il existe $a \in [-1; 1]$ tel que :

$$f(t_{\lambda}) - P(t_{\lambda}) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} S(t_{\lambda})$$

- 3) a) En déduire que :

$$\forall x \in [-1; 1], |f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} |S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)|$$

b) Pour quelles valeurs de $(a_0, \dots, a_n) \in [-1; 1]^{n+1}$ la quantité $\|S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}\|_{\infty}$ est-elle minimale ?

On note $(t_0, \dots, t_n)$ ce $(n+1)$ -uplet et P le polynôme associé

c) En déduire que :

$$\|P - f\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} \times \frac{1}{2^{n-1}}$$