

Programme de colle n°19 (9 au 13 mars 2026)

Analyse asymptotique

- Définition d'un équivalent, « petit o » et « grand O » sur les suites et les fonctions.
- Définition d'un DL en un point a.
- Unicité du DL.
- Formule de Taylor-Young (sans démonstration)
- DL1 et dérivabilité
- Intégration
- Opérations sur les DL, quotient, produit, combinaison linéaire
- Applications pour le calcul des limites, recherche d'asymptotes, position de la courbe par rapport à la tangente...

Espace vectoriel

- Espaces vectoriels de référence
- Sous-espaces vectoriel
- Famille libre

Remarque : Nous n'avons pas encore fait beaucoup d'exercices sur les espaces vectoriels, et encore moins sur les familles libres. Les colleurs pourront demander aux candidats de montrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel (nous avons fait quelques exemples en cours) et aussi de démontrer qu'une famille est libre (exemples dans le cours mais pas encore en exercices). Nous n'insisterons sur aucune technicité. L'accent sera mis sur les développements limités.

Pour s'exercer, il est conseillé aux étudiants de faire les exercices A1 – A2 – A3-B1 et B2 du TD 19.

Questions de cours

Propriété I.c.1 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Savoir redémontrer les DL suivants (en moins d'une minute !) :

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x}, x \mapsto e^x, x \mapsto \ln(1+x), \cos, \sin, sh \text{ et } ch, \arctan, x \mapsto \sqrt{1+x}$$

Propriété III.c.2 : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espace vectoriel de E. Alors :

$$\bigcap_{i \in I} F_i = F$$

Est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété IV.b.2 (caractérisation des sommes directes) : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On a alors :

$$F \oplus G = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{O_E\}$$

Exercices du type

Exercice C.2 : Déterminer le $DL_4(0)$ de :

$$f(x) = e^x \arctan(x), g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}, h(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

Exercice D.3 : Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) \quad & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \quad & c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} \\
 d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)} \quad & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}} \quad & f) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^x}
 \end{aligned}$$

Exercice D.4 : On pose :

$$f: x \mapsto \frac{-1 + \cos(x) + x \sin(x)}{x^2}$$

- 1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
- 2) Démontrer que f peut être prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
- 3) Montrer que f admet un extremum local en 0.

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Exercice A.1 : On pose :

$$F = \{ P \in \mathbb{R}[X]; P(X) = XP'(X) + P(0) \}$$

Montrer que F est un ev.

Exercice A.2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $C_A = \{ M \in M_n(\mathbb{R}); AM = MA \}$.

Montrer que C_A est un ev.

Exercice B.1 : On pose $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\text{vect}(u)$.

Exercice B.2 : On pose : $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (1, 1, -2)$. Déterminer $\text{vect}(u, v)$.