

Correction TD 19 : Espaces vectoriel

Partie A : Sous-espace vectoriel

Exercice A.1 : On pose :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(X) = XP'(X) + P(0)\}$$

Montrer que F est un ev.

Il suffit de montrer que F est une sev de $\mathbb{R}[X]$.1) On pose $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

On a alors :

$$P = XP' + P(0)$$

On en déduit donc que $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.2) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on a :

$$\begin{aligned} Q = \lambda P_1 + \mu P_2 &= \lambda(XP'_1(X) + P_1(0)) + \mu(XP'_2(X) + P_2(0)) \\ &= X(\lambda P'_1 + \mu P'_2) + (\lambda P_1 + \mu P_2)(0) \\ &= XQ'(X) + Q(0) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\lambda P_1 + \mu P_2 \in F$.Donc F est un sev de $\mathbb{R}[X]$. C'est donc un espace vectoriel.**Exercice A.2** : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $C_A = \{M \in M_n(\mathbb{R}); AM = MA\}$.Montrer que C_A est un ev.Là encore il suffit de voir que C_A est un sev de $M_n(\mathbb{R})$.

1) On a :

$$0_n \times A = 0_n = A \times 0_n$$

Donc $0_n \in C_A$.2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (M_1, M_2) \in (C_A)^2$ on a :

$$\begin{aligned} A(\lambda M_1 + \mu M_2) &= \lambda AM_1 + \mu AM_2 \\ &= \lambda M_1 A + \mu M_2 A \\ &= (\lambda M_1 + \mu M_2)A \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lambda M_1 + \mu M_2 \in C_A$$

Donc C_A est un sev de $M_n(\mathbb{R})$, c'est donc un espace vectoriel.**Exercice A.3** : Déterminer si les ensembles suivants, muni de leurs opérations usuelles sont des espaces vectoriels :

$$A_n = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) = n\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4; x + 2y - iz + (1 + 5i)t = 2 + 3i\}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = x + y\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); a + d = 0 \right\}$$

$$A_n = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) = n\}$$

NON ! En effet + n'est pas une loi de composition interne !

$$X^n \in A, -X^n \in A \text{ mais } X^n + (-X^n) \notin A$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4; x + 2y - iz + (1 + 5i)t = 2 + 3i\}$$

NON car $0_{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin B$

$$C = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y\}$$

OUI ! Il suffit de prouver que c'est un sev de $\mathbb{R}^3$!

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = x + y\}$$

NON car $+$ n'est pas une loi de composition interne :

$$(1,0) \in D, (0,1) \in D \text{ mais } (1,1) = (1,0) + (0,1) \notin D$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); a + d = 0 \right\}$$

OUI ! Là encore il suffit de prouver que c'est un sev de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice A.4 : Soit E un ev.

1) Soient F et G deux sev de E . Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un sev de } E \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

2) Soit H un troisième sev de E . Prouver que :

$$G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

1) C'est une équivalence. Il faut donc le montrer dans les deux sens.

1^{er} cas : $\Leftarrow$

Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ ou $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sev.

2^{ième} cas : Si $F \cup G$ est un sev de E .

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $x \in F, x \notin G$ et $y \in G, y \notin F$.

Si $x + y \in F \cup G$ alors $x + y \in F$ ou $x + y \in G$.

Si $x + y \in F$ alors $y = (x + y) - x \in F$. Contradiction.

On a de même si $x + y \in G$ alors $x = (x + y) - y \in G$. Contradiction.

Donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) On a $G \subset F$. Soit $x \in F \cap (G + H)$. Alors il existe $x_1 \in G$ et $x_2 \in H$ tel que :

$$\begin{cases} x \in F \\ x = x_1 + x_2 \end{cases}$$

On a donc :

$$x_2 = x - x_1 \in H \text{ et } x_2 \in F \text{ car } x_1 \in G \subset F$$

On a donc :

$x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in F \cap H$. Donc :

$$F \cap (G + H) \subset G + (F \cap H)$$

De même si $x \in G + (F \cap H)$ alors :

$$\exists (x_1, x_2) \in G \times F \cap H, x = x_1 + x_2$$

On a donc :

$$x = x_1 + x_2 \in F \cap (G + H)$$

On a donc :

$$G + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$$

On a donc :

$$G + (F \cap H) = F \cap (G + H)$$

Partie B : Sous-espace vectoriel engendré

Exercice B.1 : On pose $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\text{vect}(u)$.

$$\text{vect}((1, -1, 1)) = \{(x, -x, x) ; x \in \mathbb{R}\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \right\}$$

Exercice B.2 : On pose : $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (1, 1, -2)$. Déterminer $\text{vect}(u, v)$.

Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc l'espace engendré par u et v sera un plan.

On sait que :

$$\begin{aligned} \text{vect}(u, v) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \mu - \lambda \\ \lambda - 2\mu \end{pmatrix} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

On peut chercher une équation cartésienne du plan soit par le produit vectoriel soit en cherchant une relation

vérifiée par $\begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \mu - \lambda \\ \lambda - 2\mu \end{pmatrix}$

On peut voir que :

$$(\lambda + \mu) + 3(\mu - \lambda) = -2\lambda + 4\mu = -2(\lambda - 2\mu)$$

On a donc :

$$x + 3y = -2z$$

On peut donc en déduire que :

$$\text{vect}(u, v) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x + 3y + 2z = 0 \right\}$$

Exercice B.3 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \text{ et } v_n = 5^n$$

Déterminer $\text{vect}((u_n)_n; (v_n)_n)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On sait que :

$$\text{vect}((u_n)_n; (v_n)_n) = \{\lambda(2^n) + \mu(5^n); (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On reconnaît là les solutions des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$$

Exercice B.4 : On pose :

$$E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\} \text{ et } F = \{(x; x; -x) \in \mathbb{R}^3\}$$

a) Montrer que E et F sont des espaces vectoriels.

b) Déterminer $E \cap F$.

c) On pose $u = (1, -1, 1)$ et $v = (3, 1, 7)$. Montrer que $\text{vect}(u, v) \subset E$. A-t-on égalité ?

a) Il suffit de montrer que ce sont deux sev de $\mathbb{R}^3$.

On le montre d'abord pour E :

i) $(0; 0; 0) \in E$ donc $E \neq \emptyset$

ii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (e_1, e_2) \in E^2$ on pose :

$$e_1 = (x_1, y_1, z_1) \text{ et } e_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

On a alors :

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$$

On en déduit donc que :

$$2(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \underbrace{(2x_1 + y_1 - z_1)}_{=0} + \mu \underbrace{(2x_2 + y_2 - z_2)}_{=0} = 0$$

Donc $\lambda e_1 + \mu e_2 \in E$.

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Donc E est un $\mathbb{R}$ -ev.

On a de même pour F :

i) $(0; 0; 0) \in F$ donc $F \neq \emptyset$

ii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (e_1, e_2) \in F^2$ on pose :

$$e_1 = (x_1, x_1, -x_1) \text{ et } e_2 = (x_2, x_2, -x_2)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, x_1, -x_1) + \mu(x_2, x_2, -x_2) &= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_2, -\lambda x_1 - \mu x_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_2, -(\lambda x_1 + \mu x_2)) \end{aligned}$$

Donc $\lambda e_1 + \mu e_2 \in F$.

Donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Donc F est un $\mathbb{R}$ -ev.

b) Soit $e_1 = (x; y; z) \in E \cap F$. On a alors :

$$\begin{aligned} y = x = -z \text{ et } 2x + y - z &= 0 \\ \Rightarrow 4x &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$E \cap F = \{(0; 0; 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

c) Il suffit de montrer que $u \in E$ et $v \in F$. On a :

$$\begin{aligned} u &= (1, -1, 1) \\ \Rightarrow 2x_u + y_u - z_u &= 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow u \in E \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} v &= (3, 1, 7) \\ \Rightarrow 2x_v + y_v - z_v &= 6 + 1 - 7 = 0 \Rightarrow v \in E \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{vect}(u, v) \subset E$$

Réciproquement on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E &\Rightarrow 2x + y - z = 0 \\ &\Rightarrow 2x + y = z \end{aligned}$$

On cherche λ et μ tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Remarque : On les représente en colonne pour plus de visibilité.

On a alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On résout les deux premières :

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = x \\ -\lambda + \mu = y \end{cases}$$

On obtient :

$$\lambda = \frac{x-3y}{4} \text{ et } \mu = \frac{x+y}{4}$$

On a alors :

$$\frac{x-3y}{4} + 7 \times \frac{x+y}{4} = 2x + y$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \frac{x-3y}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x+y}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$E \subset \text{vect}(u, v)$$

On a bien :

$$E = \text{vect}(u, v)$$

Exercice B.5 : Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$(E): y' - 2y = 0$$

Déterminer une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $S = \text{vect}(f)$

Il suffit de voir que :

$$y' - 2y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{2t}$$

On a donc :

$$S = \text{vect}(t \mapsto e^{2t})$$

Exercice B.6 : Ecrire les espaces vectoriels suivants sous la forme d'un vect :

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2z = y - 2t\}$$

$$B = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2) = 0\}$$

$$C = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \text{ géométrique de raison } -3\}$$

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2z = y - 2t\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2z - y + 2t = 0\}$$

Il faut voir que l'on a 3 degrés de liberté donc trouver 3 vecteurs non coplanaires de A . On anticipe un peu l'idée de dimension ici. Mais nous allons le faire sans cela !

On pose :

$$e_1 = (1, 1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, -1) \text{ et } e_3 = \left(1, 2, 0, \frac{1}{2}\right)$$

On peut voir que e_1, e_2 et e_3 sont trois éléments de A .

On a donc :

$$\text{vect}(e_1, e_2, e_3) \subset A$$

Réciproquement soit $e = (x, y, z, t) \in A$. Il faut voir que $e \in \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$.

On sait que :

$$y = x + 2z + 2t$$

On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ x + 2z + 2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On voit immédiatement que $\lambda_2 = z$ et $\lambda_3 = 2t + 2z$ et $\lambda_1 = x - 2t - 2z$.

On a alors :

$$\lambda_1 + 2\lambda_3 = x - 2t - 2z + 4t + 4z = x + 2z + 2t$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ x + \frac{x}{2z} + 2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x - 2t - 2z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (2t + 2z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A \subset \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

On a bien :

$$\text{vect}(e_1, e_2, e_3) = A$$

$$B = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2) = 0\}$$

On a ici deux conditions imposés dans un espace qui nous offre 4 degrés de liberté $\mathbb{R}_3[X]$ car :

$$P \in \mathbb{R}_3[X] \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

On pose deux polynômes de degrés 3 tel que $P(1) = P(2) = 0$

On a :

$$P(X) = (X - 1)(X - 2)X \text{ et } Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

On a bien $(P, Q) \in B^2$.

On a donc :

$$\text{vect}(P, Q) \subset B$$

Il reste à voir que :

$$B \subset \text{vect}(P, Q)$$

Soit $R \in B$. On a donc :

$$R(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \text{ avec } a + b + c + d = 0 \text{ et } 8a + 4b + 2c + d = 0$$

On a deux équations et quatre inconnues. De plus ces deux équations sont indépendantes. On peut donc exprimer deux inconnues en fonction des deux autres :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -7a - 3b \\ d = 6a + 2b \end{cases}$$

On a donc :

$$R \in B \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, R(X) = aX^3 + bX^2 + (-7a - 3b)X + 6a + 2b$$

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse :

Si $R \in \text{vect}(P, Q)$ alors :

$$\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, R = \lambda P + \mu Q$$

On a donc :

$$R(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = -6\mu = d$$

On a donc :

$$\mu = -\frac{1}{6}d = -\frac{1}{6}(6a + 2b) = -a - \frac{1}{3}b$$

De même on a :

$$\begin{aligned} P(-1) &= -a + b - c + d = -\lambda 6 - 24\mu \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{a - b + c + 3d}{6} \\ &= \frac{a - b - 7a - 3b - 3a - b}{6} \\ &= -\frac{3}{2}a - \frac{5}{6}b \end{aligned}$$

Synthèse :

On a :

$$R(X) = aX^3 + bX^2 + (-7a - 3b)X + 6a + 2b \\ = \left(-\frac{3}{2}a - \frac{5}{6}b\right)(X-1)(X-2)X + \left(-a - \frac{1}{3}b\right)(X-1)(X-2)(X-3)$$

Donc :

$$B \subset \text{vect}((X-1)(X-2)X, (X-1)(X-2)(X-3))$$

On a donc :

$$B = \text{vect}((X-1)(X-2)X, (X-1)(X-2)(X-3))$$

$$C = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ géométrique de raison } -3\} = \text{vect}((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Exercice B.7 : Montrer que :

$$\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$$

On a tout simplement :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

Donc :

$$\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice B.8 : Déterminer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\} = \text{vect}((v_n)_{n \in \mathbb{N}}; (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Il suffit de résoudre l'équation caractéristique !

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \text{ ou } r = 3$$

On a donc d'après la formule des solutions d'une suite linéaire récurrence d'ordre 2 :

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\} = \text{vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}; (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Partie C : Somme directe**Exercice C.1 :** Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergente}\}$, $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ constante}\}$ et $G = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergente vers } 0\}$. Montrer que : $E = F \oplus G$

Nous devons montrer deux choses :

i) $F \cap G = \{0_E\}$ Soit $(u_n)_n \in F \cap G$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \text{cste et } \lim_n u_n = 0$$

On en déduit donc que : n

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{cste} = u_n = 0$$

ii) Soit (u_n) une suite convergente. On pose :

$$\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{K}$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_n - \ell) + \ell = v_n + w_n \text{ avec } v_n = u_n - \ell \in G \text{ et } w_n = \ell \in F$$

On a donc :

$$\forall (u_n) \in E, \exists ((v_n); (w_n)) \in G \times F, u_n = v_n + w_n$$

On a donc :

$$\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergente}\} = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ constante}\} \oplus \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergente vers } 0\}$$

Exercice C.2 : Soit $F = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x + y, x + y, 3y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

i) Montrons déjà que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Soit $e = (x, y, z) \in F \cap G$.

On a donc :

$$y = 2x \text{ et } z = 3x$$

De plus on a :

$$y = x$$

Ainsi on a :

$$x = 2x \Rightarrow x = 0$$

Donc $e = 0_{\mathbb{R}^3}$

On en déduit donc que :

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

ii) Montrons à présent que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \exists (e_1, e_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$$

$$\text{Soit } e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

On résout :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 2x' \\ 3x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' + y'' \\ x'' + y'' \\ 3y'' \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} x' + x'' + y'' = x \\ 2x' + x'' + y'' = y \\ 3x' + 3y'' = z \end{cases}$$

On peut résoudre ce système grâce aux matrices ou bien par combinaison linéaire sur les lignes du système !

On obtient :

$$\begin{cases} x' + x'' + y'' = x \\ 2x' + x'' + y'' = y \\ 3x' + 3y'' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y - x \\ x'' = x - \frac{z}{3} \\ y'' = \frac{z - 3y + 3x}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y - x \\ 2(y - x) \\ 3(y - x) \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2x - y \\ 2x - y \\ z - 3y + 3x \end{pmatrix}}_{\in G}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}^3 = F + G$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$$

Exercice C.3 : On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E .

Il faut déterminer un vecteur non coplanaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que $e_1 \notin F$.

On raisonne par l'absurde. On sait que :

$$e_1 \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\lambda + \mu = 1 \text{ et } 3\lambda + 3\mu = 0$$

ABSURDE !!!

Donc $e_1 \notin F$.

Montrons à présent que :

$$\mathbb{R}^3 = \text{vect}(e_1) \oplus F$$

i) Montrons que $\text{vect}(e_1) \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soit $e \in \text{vect}(e_1) \cap F$

On a alors :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, e = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0 = \lambda_1 \Rightarrow e = 0_{\mathbb{R}^3}$$

ii) Montrons que :

$$\text{vect}(e_1) + F = \mathbb{R}^3$$

Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{y}{3} \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = z \end{cases}$$

On résout alors ce système à l'aide d'une matrice ou par combinaison linéaire sur les lignes et on obtient :

$$\lambda_1 = x - \frac{y}{3} ; \lambda_2 = \frac{5y}{9} - \frac{1}{3}z ; \lambda_3 = \frac{z}{3} - \frac{2y}{9}$$

On a bien :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\left(x - \frac{y}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \text{vect}(e_1)} + \underbrace{\left(\frac{5y}{9} - \frac{1}{3}z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{z}{3} - \frac{2y}{9}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\in F}$$

Donc :

$$\mathbb{R}^3 = \text{vect}(e_1) + F$$

Donc $\mathbb{R}^3 = \text{vect}(e_1) \oplus F$

Exercice C.4 : On pose $E = \mathbb{R}^4$, $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$ et $u_4 = (1,1,1,1)$.
De plus on pose : $F = \text{vect}(u_1; u_2)$ et $G = \text{vect}(u_3, u_4)$.

a) Montrer que :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\} \text{ et } G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

b) Montrer que : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

a) Il faut montrer des inclusions d'ensembles.

- Montrons que $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\} \subset \text{vect}(u_1, u_2)$

Soit $e = (x, y, z, t) \in \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\}$

On a donc :

$$e = (x, y, 0, 0) = (x - y)(1, 0, 0, 0) + y(1, 1, 0, 0) = (x - y)u_1 + yu_2$$

On en déduit donc que $e \in \text{vect}(u_1, u_2)$

Donc :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\} \subset \text{vect}(u_1, u_2)$$

- Réciproquement on a :

$$u_1 \in \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\} \text{ et } u_2 \in \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\}$$

Or $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\}$ est un espace vectoriel donc :

$$\text{vect}(u_1; u_2) \subset \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\}$$

On a donc :

$$\text{vect}(u_1; u_2) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\}$$

On fait de même avec $G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$

- Montrons que $G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\} \subset \text{vect}(u_3, u_4)$

Soit $e = (x, y, z, t) \in G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$

On a donc :

$$e = (x, y, z, t) = (x, x, x, t) = (x - t)(1, 1, 1, 0) + t(1, 1, 1, 1)$$

Cela est plus visible si on écrit les vecteurs en colonne :

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ t \end{pmatrix} = (x - t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $e \in \text{vect}(u_3, u_4)$

Donc :

$$\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\} \subset \text{vect}(u_3, u_4)$$

- Réciproquement on a :

$$u_3 \in \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\} \text{ et } u_4 \in \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

Or $\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$ est un espace vectoriel donc :

$$\text{vect}(u_3; u_4) \subset \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

On a donc :

$$\text{vect}(u_3; u_4) = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

b) Montrons les deux assertions voulues :

i) Soit $e \in F \cap G$

On pose :

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \text{ et } e = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ t \end{pmatrix} \in G$$

On en déduit donc que : $e = 0_{\mathbb{R}^4}$.

ii) On a :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{(x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{(y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z - t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

Ainsi on a :

$$\mathbb{R}^4 = F + G$$

On a donc :

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$$

Exercice C.5 : Dans $E = \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ on pose :

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0, f(0) = f'(1) = 0 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \end{cases}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

i) Soit $f \in F \cap G$

On a alors :

$$f \in F \Rightarrow \int_0^1 f = 0, f(0) = f'(1) = 0$$

De plus :

$$f \in G \Rightarrow \forall x \in [0; 1], f(x) = ax^2 + bx + c$$

On a donc :

$$f(0) = c = 0 \text{ et } f'(1) = 2a + b = 0$$

De plus on a :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

On a donc :

$$F \cap G = \{0_{\mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})}\}$$

ii) On peut raisonner par analyse-synthèse.

Analyse :

On pose $f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ tel que :

$$\exists (g, h) \in F \times G \text{ tel que } f = g + h$$

On a alors :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = g(x) + ax^2 + bx + c$$

On a alors :

$$f(0) = c \text{ et } f'(1) = 2a + b$$

De plus on a :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

On résout alors :

$$\begin{cases} c = f(0) \\ 2a + b = f'(1) \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \int_0^1 f(x) dx \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} a = \frac{3}{4} f'(1) + \frac{3}{2} f(0) - \frac{3}{2} \int_0^1 f(x) dx \\ b = 3 \int_0^1 f(x) dx - 3f(0) - \frac{1}{2} f'(1) \\ c = f(0) \end{cases}$$

Synthèse : On a :

$$\begin{aligned} & \forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]; \mathbb{R}), \forall x \in [0; 1], \\ f(x) = & \underbrace{\left[f(x) - \left(\frac{3}{4} f'(1) + \frac{3}{2} f(0) - \frac{3}{2} \int_0^1 f(x) dx \right) x^2 - \left(3 \int_0^1 f(x) dx - 3f(0) - \frac{1}{2} f'(1) \right) x - f(0) \right]}_{\in F} + \\ & \underbrace{\left[\left(\frac{3}{4} f'(1) + \frac{3}{2} f(0) - \frac{3}{2} \int_0^1 f(x) dx \right) x^2 + \left(3 \int_0^1 f(x) dx - 3f(0) - \frac{1}{2} f'(1) \right) x + f(0) \right]}_{\in G} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathcal{C}^1([0,1]; \mathbb{R}) = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0, f(0) = f'(1) = 0 \right\} \oplus \left\{ \begin{matrix} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \end{matrix}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Exercice C.6 : Montrer que :

$$\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(1) = P(2) = 0\} \oplus \mathbb{R}_1[X]$$

i) Soit $P \in \{P \in \mathbb{R}[X]; P(1) = P(2) = 0\} \cap \mathbb{R}_1[X]$

Donc P admet deux racines distinctes et est de dimension inférieure ou égale à 1. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

ii) On raisonne là encore par analyse-synthèse :

Soit $P \in \{P \in \mathbb{R}[X]; P(1) = P(2) = 0\} + \mathbb{R}_1[X]$

On en déduit qu'il existe $(P_1, a, b) \in \{P \in \mathbb{R}[X]; P(1) = P(2) = 0\} \times \mathbb{R}^2, P = P_1 + aX + b$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(1) &= a + b \\ P(2) &= 2a + b \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$a = P(2) - P(1) \text{ et } b = 2P(1) - P(2)$$

Synthèse :

On a :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(X) = \underbrace{[P(X) - (P(2) - P(1))X - (2P(1) - P(2))]}_{\in \{P \in \mathbb{R}[X]; P(1)=P(2)=0\}} + \underbrace{[(P(2) - P(1))X + (2P(1) - P(2))]}_{\in \mathbb{R}_1[X]}$$

On a donc :

$$\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(1) = P(2) = 0\} \oplus \mathbb{R}_1[X]$$

Partie D : Famille libre et liée

Exercice D.1 : Montrer que la famille suivante est libre dans $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc la famille (e_1, e_2, e_3) est libre dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice D.2 : Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $B = (x \mapsto \cos(x); x \mapsto \sin(x); x \mapsto e^x)$ est libre.

On résout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 e^x = 0$$

On écrit l'égalité pour $x = 0$ et $x = \pi$. On obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 e^\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_3 = \lambda_1 = 0$$

De plus avec $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$\lambda_2 = 0$$

On en déduit que la famille $B = (x \mapsto \cos(x); x \mapsto \sin(x); x \mapsto e^x)$ est libre.

Exercice D.3 : Montrer que la famille $(\sin^k(x))_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On résout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \sin^k(x) = 0$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(\sin(x)) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sin^k(x) = 0 \text{ avec } P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$$

On en déduit donc que :

$$\forall X \in [-1; 1], P(X) = 0$$

Ainsi P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul !

On a donc :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Donc la famille $(\sin^k(x))_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice D.4 : Montrer que la famille $(\sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On veut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \sin(kx) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On raisonne par récurrence.

Initialisation : Si $n = 1$ on a :

$$\lambda_1 \sin(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Il suffit de poser $x = \frac{\pi}{2}$ et on a :

$$\lambda_1 = 0$$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \sin(kx) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \sin(kx) + \lambda_{n+1} \sin((n+1)x) = 0$$

On pose :

$$x = \frac{\pi}{n+1}$$

On a alors :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \neq 0$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_{n+1} \sin((n+1)x) = 0 \Rightarrow \lambda_{n+1} = 0 \text{ pour } x = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

On en déduit donc que la proposition est héréditaire.

Conclusion : On conclut par le principe de récurrence. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \sin(kx) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Donc la famille $((x \mapsto \sin(kx))_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket})$ est libre.

Exercice D.5 : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. La famille $(x \mapsto e^{\lambda_i x})_{1 \leq i \leq n}$ est-elle libre ou liée ?

On cherche à montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k x} = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$$

On démontre cela par récurrence.

Initialisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mu_1 e^{\lambda_1 x} = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0 \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$$

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que si $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k x} = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$$

On a $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k e^{\lambda_k x} &= 0 \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k x} + \mu_{n+1} e^{\lambda_{n+1} x} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\mu_{n+1} e^{\lambda_{n+1} x} = - \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k x}$$

On pose :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k x} + \mu_{n+1} e^{\lambda_{n+1} x} \\ f_n &\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ et :} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) &= \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k e^{\lambda_k x} + \mu_{n+1} \lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1} x} = 0 \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\mu_{n+1} e^{\lambda_{n+1} x} = - \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k x}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k e^{\lambda_k x} + \lambda_{n+1} \left(- \sum_{k=1}^n \mu_k e^{\lambda_k x} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \mu_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) e^{\lambda_k x} &= 0 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence on en déduit que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mu_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$$

Or on sait que :

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1}$$

On a donc :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mu_k = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mu_{n+1} e^{\lambda_{n+1} x} = 0 \Rightarrow \mu_{n+1} = 0$$

Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Exercice D.6 : Démontrer que la famille suivante de $\mathbb{R}[X]$ est libre :

$$B = (X^k (X - 1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$$

On résout :

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k X^k (X - 1)^{n-k} = 0$$

Pour $X = 0$ on obtient :

$$\lambda_0 = 0$$

Ainsi on a :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} = 0$$

$$\Rightarrow X \sum_{k=1}^n \lambda_k X^{k-1} (X-1)^{n-k} = 0$$

Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k X^{k-1} (X-1)^{n-k} = 0$$

Pour $X = 0$ on obtient $\lambda_1 = 0$

Donc on a :

$$\sum_{k=2}^n \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} = 0$$

En réitérant le processus on obtient $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \lambda_i = 0$

Donc la famille $B = (X^k (X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Exercice D.7 : Soit E un espace vectoriel et $(a, b, c) \in E^3$ une famille de E . Montrer que :

(a, b, c) est libre $\Leftrightarrow (b+c, c+a, a+b)$ est libre

C'est une équivalence.

1^{er} cas : $\Rightarrow$

Soit (a, b, c) une famille libre.

On résout :

$$\lambda_1(b+c) + \lambda_2(c+a) + \lambda_3(a+b) = 0_E$$

$$\Rightarrow a(\lambda_2 + \lambda_3) + b(\lambda_1 + \lambda_3) + c(\lambda_2 + \lambda_1) = 0_E$$

Comme la famille (a, b, c) est libre on en déduit que :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

On résout et on trouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2^{ème} cas : $\Leftarrow$

On suppose que la famille $(b+c, c+a, a+b)$ est libre.

On résout :

$$\lambda_1(a) + \lambda_2(b) + \lambda_3(c) = 0_E$$

$$\Rightarrow (b+c) \left(\frac{-\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) + (a+c) \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + \lambda_3 \right) + (a+b) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 0 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + \lambda_3 = 0 \text{ car } (b+c, c+a, a+b) \text{ est libre.} \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 0 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Exercice D.8 : a) Calculer :

$$\forall (k, p) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \int_0^\pi \cos(kx) \cos(px) dx = I_{p,k}$$

b) En déduire que $(\cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) On a :

$$\forall (k, p) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \int_0^\pi \cos(kx) \cos(px) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((k+p)x) + \cos((k-p)x) dx$$

1^{er} cas : Si $p = k$ on a alors :

$$I_{p,p} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2px) + 1 dx = \begin{cases} \pi & \text{si } p = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

2^{ième} cas : Si $p \neq k$ on a alors :

$$\begin{aligned} I_{p,k} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((k+p)x) + \cos((k-p)x) dx \\ &= \frac{1}{2(k+p)} [\sin((k+p)x)]_0^\pi + \frac{1}{2(k-p)} [\sin((k-p)x)]_0^\pi \\ &\Rightarrow I_{p,k} = 0 \end{aligned}$$

b) On résout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos(kx) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) + \dots + \lambda_n \cos(nx) = 0$$

1) On intègre. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) + \dots + \lambda_n \cos(nx)) dx &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^n \lambda_k \int_0^\pi \cos(kx) dx &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_0 &= 0 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) + \dots + \lambda_n \cos(nx) = 0$$

2) On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket, \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \cos(kx) \right) \cos(px) &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \cos(kx) \cos(px) \right) dx &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k I_{p,k} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\lambda_p \pi}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_p &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que la famille $(\cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Partie E : Base d'un espace vectoriel

Exercice E.1 : On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 3y - 2z = 0\}$. Déterminer une base de F .

On a ici deux degrés de liberté donc on doit trouver deux vecteurs non colinéaires de F .

On pose par exemple :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit déjà que e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires. On a donc **(e_1, e_2) est une famille libre** de F .

Il reste à montrer que c 'est une famille génératrice !

On a :

$$\forall e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F, x = -3y + 2z$$

Or on a :

$$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^3, e = \begin{pmatrix} -3y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z - y) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la famille (e_1, e_2) est génératrice.

Donc la famille (e_1, e_2) est une base de F .

Exercice E.2 : On pose :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(0) = P(1) = 0\}$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel.

b) Déterminer une base de E .

a) Il faut montrer que E est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$.

On a :

i) Soit $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. On a alors $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P(0) = P(1) = 0$. Donc $E \neq \emptyset$.

ii) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in (E)^2$. On pose :

$$H = \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_4[X] \text{ et } H(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0 = H(1)$$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$, c 'est donc un $\mathbb{R}$ -ev.

b) On sait que $\mathbb{R}_4[X]$ a 5 degrés de liberté car :

$$P \in \mathbb{R}_4[X] \Leftrightarrow \exists (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5, P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_4X^4$$

De plus on sait que :

$$P(0) = 0 = a_0 \text{ et } P(1) = 0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} P \in E &\Leftrightarrow \exists (a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^3, P(X) = -(a_2 + a_3 + a_4)X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \\ &= a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X) + a_4(X^4 - X) \end{aligned}$$

On pose : $\mathcal{B} = (X^2 - X; X^3 - X; X^4 - X)$.

$\mathcal{B}$ est une famille libre de E car c 'est une famille de polynômes échelonnés. De plus elle est génératrice d'après l'égalité précédente.

On en déduit donc que c 'est une base de E .

Exercice E.3 : On pose $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer la base canonique de $D_n(\mathbb{R})$.

On pose $D_i = E_{i,i}$ où $E_{i,j}$ représente la matrice élémentaire. On pose :

$$\mathcal{B} = (D_1; \dots; D_n)$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $D_n(\mathbb{R})$.

i) $\mathcal{B}$ est libre.

En effet il suffit de résoudre :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \lambda_k D_k = 0_n \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = 0_n = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

ii) De plus la famille est génératrice :

$$\forall D \in D_n(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \lambda_k D_k$$

C'est donc une base de $D_n(\mathbb{R})$.

Exercice E.4 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. On pose $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ deux familles libres de vecteurs de E . On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i \in F_i$ où $F_i = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$

a) Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_i \in E_i \text{ où } E_i = \text{vect}(f_1, \dots, f_i)$$

b) Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E alors $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de E .

a) On démontre cela par récurrence forte sur i .

Initialisation : Pour $i = 1$. On a :

$$f_1 \in \text{vect}(e_1) \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{K}, f_1 = \lambda_1 e_1$$

Or (f_1) est libre donc $f_1 \neq 0$. On a donc :

$$e_1 = \frac{1}{\lambda_1} f_1 \Rightarrow e_1 \in \text{vect}(f_1)$$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit i un entier naturel non nul fixé, $i \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$. On suppose vraie :

$$\forall k \in \llbracket 1; i \rrbracket, e_k \in \text{vect}(f_1, \dots, f_k)$$

Montrons que :

$$e_{i+1} \in \text{vect}(f_1, \dots, f_i, f_{i+1})$$

On sait que :

$$f_{i+1} \in \text{vect}(e_1, \dots, e_i, e_{i+1})$$

On en déduit donc que :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}) \in \mathbb{K}^{i+1}, f_{i+1} = \sum_{k=1}^{i+1} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^i \lambda_k e_k + \lambda_{i+1} e_{i+1}$$

On en déduit donc que :

$$\lambda_{i+1} e_{i+1} = f_{i+1} - \sum_{k=1}^i \lambda_k e_k$$

Or on sait que :

$$\forall k \in \llbracket 1; i \rrbracket, e_k \in \text{vect}(f_1, \dots, f_k)$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in \llbracket 1; i \rrbracket, \exists (\lambda_{1,k}; \dots; \lambda_{k,k}), e_k = \sum_{j=1}^k \lambda_{j,k} f_j$$

On a donc :

$$\lambda_{i+1} e_{i+1} = f_{i+1} - \sum_{k=1}^i (-\lambda_k) \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{j,k} f_j \right)$$

Il reste à montrer que $\lambda_{i+1} \neq 0$.

On raisonne par l'absurde. Si $\lambda_{i+1} = 0$ on a alors :

$$f_{i+1} \in \text{vect}(e_1; \dots; e_i) = \text{vect}(f_1; \dots; f_i)$$

Donc la famille $(f_1; \dots; f_i; f_{i+1})$ est liée. Contradiction.

On en déduit donc que $\lambda_{i+1} \neq 0$.

Ainsi on a :

$$e_{i+1} = \frac{1}{\lambda_{i+1}} f_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{1}{\lambda_{i+1}} (-\lambda_k) \left(\sum_{j=1}^k \lambda_{j,k} f_j \right)$$

Donc $e_{i+1} \in \text{vect}(f_1; \dots; f_{i+1})$. Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : On conclut par le principe de récurrence.

b) Soit $(e_1; \dots; e_p)$ une base de E . Elle est donc libre et génératrice.

On sait que :

$(f_1; \dots; f_p)$ est libre. Il reste à montrer qu'elle est génératrice.

On sait que :

$$\forall e \in E, \exists (\lambda_1; \dots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, e = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k$$

Or on sait que :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \exists (\lambda_{1,k}; \dots; \lambda_{p,k}), e_k = \sum_{j=1}^p \lambda_{j,k} f_j$$

On a donc :

$$e = \sum_{k=1}^p \lambda_k \left(\sum_{j=1}^p \lambda_{j,k} f_j \right)$$

Ainsi e est une combinaison linéaire des $(f_1; \dots; f_p)$. Donc elle est génératrice.

Donc $(f_1; \dots; f_p)$ est une base de E .