

TD 19 : Espaces vectoriels

Partie A : Sous-espace vectoriel

Exercice A.1 : On pose :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(X) = XP'(X) + P(0)\}$$

Montrer que F est un ev.

Exercice A.2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $C_A = \{M \in M_n(\mathbb{R}); AM = MA\}$.

Montrer que C_A est un ev.

Exercice A.3 : Déterminer si les ensembles suivants, muni de leurs opérations usuelles sont des espaces vectoriels :

$$A_n = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) = n\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4; x + 2y - iz + (1 + 5i)t = 2 + 3i\}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = x + y\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); a + d = 0 \right\}$$

Exercice A.4 : Soit E un ev.

1) Soient F et G deux sev de E. Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un sev de E} \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

2) Soit H un troisième sev de E. Prouver que :

$$G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

Partie B : Sous-espace vectoriel engendré

Exercice B.1 : On pose $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\text{vect}(u)$.

Exercice B.2 : On pose : $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (1, 1, -2)$. Déterminer $\text{vect}(u, v)$.

Exercice B.3 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \text{ et } v_n = 5^n$$

Déterminer $\text{vect}((u_n)_n; (v_n)_n)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice B.4 : On pose :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\} \text{ et } F = \{(x, x, -x) \in \mathbb{R}^3\}$$

a) Montrer que E et F sont des espaces vectoriels.

b) Déterminer $E \cap F$.

c) On pose $u = (1, -1, 1)$ et $v = (3, 1, 7)$. Montrer que $\text{vect}(u, v) \subset E$. A-t-on égalité ?

Exercice B.5 : Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$(E): y' - 2y = 0$$

Déterminer une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $S = \text{vect}(f)$

Exercice B.6 : Ecrire les espaces vectoriels suivants sous la forme d'un vect :

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2z = y - 2t\}$$

$$B = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2) = 0\}$$

$$C = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ géométrique de raison } -3\}$$

Exercice B.7 : Montrer que :

$$\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice B.8 : Déterminer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\} = \text{vect}((v_n)_{n \in \mathbb{N}}; (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Partie C : Somme directe

Exercice C.1 : Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergente}\}$, $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ constante}\}$ et $G = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ convergente vers } 0\}$. Montrer que : $E = F \oplus G$

Exercice C.2 : Soit $F = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x + y, x + y, 3y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

Exercice C.3 : On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E .

Exercice C.4 : On pose $E = \mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$ et $u_4 = (1, 1, 1, 1)$. De plus on pose : $F = \text{vect}(u_1; u_2)$ et $G = \text{vect}(u_3, u_4)$.

a) Montrer que :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\} \text{ et } G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

b) Montrer que : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

Exercice C.5 : Dans $E = \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ on pose :

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0, f(0) = f'(1) = 0 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \end{cases}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice C.6 : Montrer que :

$$\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(1) = P(2) = 0\} \oplus \mathbb{R}_1[X]$$

Partie D : Famille libre et liée

Exercice D.1 : Montrer que la famille suivante est libre dans $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice D.2 : Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $B = (x \mapsto \cos(x); x \mapsto \sin(x); x \mapsto e^x)$ est libre.

Exercice D.3 : Montrer que la famille $(\sin^k(x))_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice D.4 : Montrer que la famille $(\sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice D.5 : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. La famille $(x \mapsto e^{\lambda_i x})_{1 \leq i \leq n}$ est-elle libre ou liée ?

Exercice D.6 : Démontrer que la famille suivante de $\mathbb{R}[X]$ est libre :

$$B = (X^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$$

Exercice D.7 : Soit E un espace vectoriel et $(a, b, c) \in E^3$ une famille de E . Montrer que :
 (a, b, c) est libre $\Leftrightarrow (b + c, c + a, a + b)$ est libre

Exercice D.8 : a) Calculer :

$$\forall (k, p) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \int_0^\pi \cos(kx) \cos(px) dx = I_{p,k}$$

b) En déduire que $(\cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Partie E : Base d'un espace vectoriel
--

Exercice E.1 : On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 3y - 2z = 0\}$. Déterminer une base de F .

Exercice E.2 : On pose :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(0) = P(1) = 0\}$$

- a) Montrer que E est un espace vectoriel.
- b) Déterminer une base de E .

Exercice E.3 : On pose $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer la base canonique de $D_n(\mathbb{R})$.

Exercice E.4 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. On pose $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ deux familles libres de vecteurs de E . On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in F_i$ où $F_i = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$

a) Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_i \in E_i \text{ où } E_i = \text{vect}(f_1, \dots, f_i)$$

b) Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E alors $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de E .