

Chapitre 20 : Intégration sur un segment

Partie A : Propriétés de l'intégrale

Dans cette partie, sauf mention du contraire, on pose $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

I) Fonctions en escaliers.

a) Subdivision d'un segment

Définition : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, I = [a; b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle subdivision s du segment $[a; b]$ toute suite finie $s = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

On note $\text{supp}(s) = \{x_0, \dots, x_n\}$ le support de la subdivision.

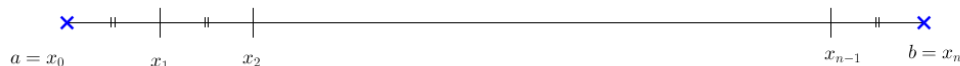
Exemple I.a.1 : Déterminer deux subdivisions de l'intervalle $[0; 1]$ différentes mais comportant le même nombre d'éléments.

Propriété I.a.2 : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, I = [a; b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ définie par :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_i = a + i \times \frac{b-a}{n}$$

Est l'unique subdivision comportant $n + 1$ éléments telle que :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_{i+1} - x_i = \text{constante} = \frac{b-a}{n}$$



Application I.a.3 : Déterminer la subdivision régulière de $[6; 9]$ comportant 16 éléments.



Application I.a.4 : Ecrire une fonction python *subdivision(a,b,n)* qui renvoie une liste représentant la subdivision régulière de $[a, b]$ comportant $n + 1$ éléments.

b) Fonctions en escalier

Définition : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$. On dit qu'une fonction $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe $s = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ une subdivision de $[a; b]$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle $]x_k; x_{k+1}[$, pour tout $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$.

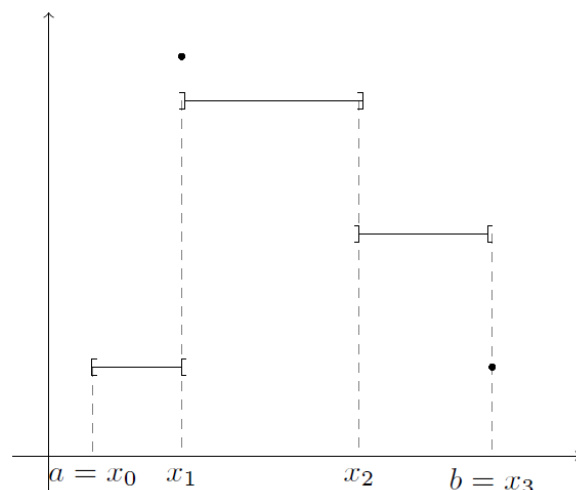
On dit que φ est en escalier relativement à la subdivision s .

Notation : On note $E(a; b)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a; b]$.

Exemple I.b.1 :

- Toute fonction constante sur $[a; b]$ est en escalier relativement à toute subdivision s de $[a; b]$.
- La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a; b]$ relativement à la subdivision de $[a; b]$ où $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont tous des entiers consécutifs, avec $x_1 = [a] + 1$

Attention : On peut avoir des valeurs isolées en chaque x_i comme l'illustre le graphique ci-contre :



Propriété I.b.2 : $\forall (f, g) \in E([a, b], \mathbb{R})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$

- 1) $|f| \in E([a, b], \mathbb{R})$
- 2) $\lambda f + \mu g \in E([a, b], \mathbb{R})$
- 3) $f \times g \in E([a, b], \mathbb{R})$

c) Intégration des fonctions en escalier

Définition : Soit $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier relativement à la subdivision $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

On pose :

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \forall x \in]x_k; x_{k+1}[, \varphi(x) = c_k$$

On appelle intégrale de la fonction en escalier φ sur $[a; b]$ le réel :

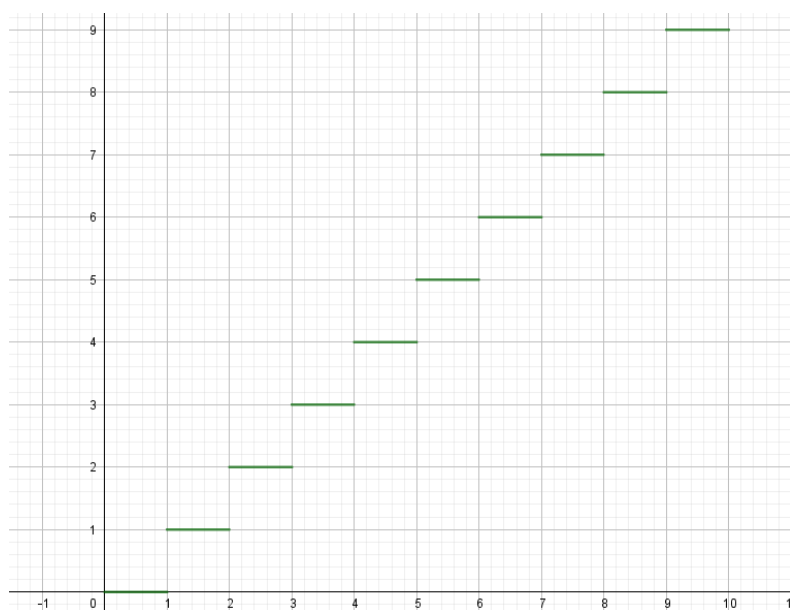
$$\int_{[a;b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k)$$

Remarques :

- L'intégrale ne dépend pas des valeurs de φ au point de la subdivision.
- L'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.

Exemple I.c.1 : Soit n un entier naturel. On pose $E: x \mapsto [x]$. Calculer :

$$\int_{[0;n]} E$$



Propriété I.c.2 : On a :

$$\int_{[a;b]} \varphi = A_+ - A_-$$

Où A_+ (resp A_-) désigne la somme des aires des rectangles situées au-dessus (resp au-dessous) de l'axe des abscisses.

Remarque : Il faut bien faire attention ici à ne pas se tromper entre une aire (toujours positive !) et une intégrale qui est un nombre réel !

Application I.c.3 : Soit n un entier naturel. Déterminer :

$$\int_{[-n;n]} E$$

Propriété I.c.4 : On a les propriétés suivantes :

(1) Linéarité de l'intégrale :

$$\forall (\varphi, \psi) \in E([a; b], \mathbb{R})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_{[a; b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a; b]} \varphi + \mu \int_{[a; b]} \psi$$

(2) Inégalité triangulaire :

$$\forall \varphi \in E([a; b], \mathbb{R}), \left| \int_{[a; b]} \varphi \right| \leq \int_{[a; b]} |\varphi|$$

(3) Relation de Chasles :

$$\forall \varphi \in E([a; b], \mathbb{R}), \forall c \in]a; b[, \int_{[a; b]} \varphi = \int_{[a; c]} \varphi + \int_{[c; b]} \varphi$$

(4) Positivité :

$$\forall \varphi \in E([a; b], \mathbb{R}), \varphi \geq 0 \Rightarrow \int_{[a; b]} \varphi \geq 0$$

(5) Croissante :

$$\forall (\varphi, \psi) \in E([a; b], \mathbb{R})^2, \varphi \leq \psi \Rightarrow \int_{[a; b]} \varphi \leq \int_{[a; b]} \psi$$

d) Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier

Propriété I.d.1 : Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ continue sur $[a; b]$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $\theta: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que :

$$\forall x \in [a; b], |f(x) - \theta(x)| \leq \epsilon$$

II) Intégration d'une fonction continue sur un segment

a) Lien avec les fonctions en escaliers

Remarques :

- Grâce à l'approximation des fonctions continues par les fonctions en escalier, on peut définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a; b]$.

Pour ce faire on définit :

$$E_f^+ = \{\varphi \in E([a; b]), \varphi \geq f\}$$

$$E_f^- = \{\varphi \in E([a; b]), \varphi \leq f\}$$

On a alors la propriété suivante :

Propriété II.a.1 (Définition de l'intégrale d'une fonction continue) :

$$\inf_{\varphi \in E_f^+} \int_{[a; b]} \varphi = \sup_{\phi \in E_f^-} \int_{[a; b]} \phi$$

On définit alors :

$$\int_{[a; b]} f = \inf_{\varphi \in E_f^+} \int_{[a; b]} \varphi = \sup_{\phi \in E_f^-} \int_{[a; b]} \phi$$

On note de même que pour les fonctions en escalier :

$$\int_{[a; b]} f = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f \text{ où } f \in \mathcal{C}([a; b])$$

- Par convention, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt \text{ et } \int_a^a f(t) dt = 0$$

Cela nous permet d'étendre la définition de l'intégrale pour $b < a$

- Si f est une fonction positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f$ représente l'aire du domaine D , délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

Remarque : La définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment donné précédemment ne nous aide pas à calculer une intégrale, mais cela nous aide à démontrer les propriétés de l'intégrale, données dans la partie suivante.

b) Propriétés de l'intégrale de terminal

Lemme II.b.1 : Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E([a, b], \mathbb{R})$ tel que $\forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$. On a alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \epsilon(b-a)$$

Dans toute cette partie, f et g représentent deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$.

Propriété II.b.1 :

(1) L'intégrale est linéaire :

$$\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

(2) La relation de Chasles :

$$\forall c \in [a; b], \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(3) La positivité :

$$\forall x \in [a; b], f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

(4) La croissance :

$$\forall x \in [a; b], f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

(5) L'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

ATTENTION : Pour le point 4, il faut bien vérifier que $b \geq a$.

Remarque : La croissance de l'intégrale nous permet de démontrer un résultat très important pour la suite :

Propriété II.b.2 : Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et positive. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \text{ si et seulement si } \forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

c) La valeur moyenne

Définition (valeur moyenne) : Soit f continue sur un intervalle $[a; b]$. La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est alors donnée par :

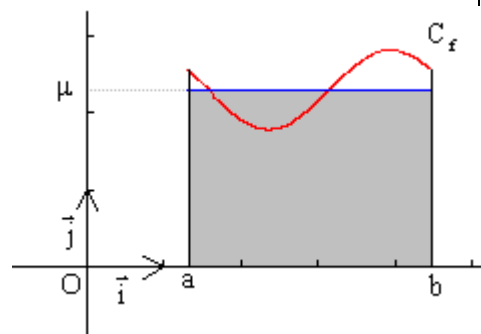
$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$$

Propriété II.c.2 : La valeur moyenne $\bar{f}$ est la constante qui vérifie :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \bar{f} dx$$

Propriété II.c.3 : Soit f continue sur un intervalle $[a; b]$ et $\bar{f}$ sa valeur moyenne. Alors :

$$\exists c \in [a; b], f(c) = \bar{f}$$



III) Calcul intégrale

a) Le théorème fondamental

Propriété III.a.1 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in I$. On a alors :

- f admet des primitives sur I
- f admet une unique primitive qui s'annule en a :

$$F : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

- Pour toute primitive G de f , on a :

$$\forall x \in I, G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt$$

b) Lien entre primitive et intégrale

Propriété III.b.1 (Théorème fondamental de l'analyse) : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Soit F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Application III.b.2 (Intégrale à paramètre) : On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \int_{-x}^{-3x} e^{-t^2} dt$$

Déterminer les variations de Ψ sur $\mathbb{R}$ et sa limite en $+\infty$.

Remarque : Nous avons ainsi démontré les propriétés de l'intégrale que vous avez vu en terminale. Tout ce qui a été fait dans le chapitre 8 sur le calcul de primitives, changement de variables, intégration par partie... démontré à l'aide de la propriété III.B.1 reste donc valable.

c) Extension sur $\mathbb{C}$

Définition : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On a alors :

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^x \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Application III.e.1 : Déterminer une primitive de :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(3x) e^{5x} \end{cases}$$

Remarque : Les propriétés suivantes sont conservées : fonction continue sur un segment, linéarité, majoration du module de l'intégrale, intégration par parties et changement de variable.

Application III.e.2 : Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1}{x-i} dx$$

IV) Utilisation des propriétés de l'intégrale

a) Linéarité de l'intégrale

Application IV.a.1 : Déterminer :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

b) Relation de Chasles

Application IV.b.1 : Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

c) Croissance de l'intégrale

Application IV.c.1 : Montrer que : $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$

d) Inégalité triangulaire

Application IV.d.1 : On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 t^n \sin(nt) dt$$

Déterminer la limite de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

e) Valeur moyenne

Exemple IV.e.1 : Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto \cos^2(x)$ sur $[0; 2\pi]$.