

Correction DM n°5 bis

Soit f une fonction définie et continue sur $[-1; 1]$. On définit :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [-1; 1]} |f(x)|$$

Vous verrez l'an prochain que ce nombre est très important.

Partie A : Echauffement

1) On pose :

$$f: x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2} \text{ pour } x \in [-1; 1]$$

Déterminer $\|f\|_{\infty}$.

2) a) Justifier l'existence de $\|f\|_{\infty}$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([-1; 1])$.

b) Justifiez que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([-1; 1]), \exists c \in [-1; 1] \text{ tel que } \|f\|_{\infty} = |f(c)|$$

c) Si $f \in \mathcal{C}^1([-1; 1])$ et $c \in]-1; 1[$, déterminer $f'(c)$.

Nous allons à présent nous intéresser aux polynômes. On se place dans $\mathbb{R}[X]$. Dans toute la suite on confond le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec sa fonction polynomiale $\tilde{P}$ pour éviter une certaine lourdeur dans les notations.

3) a) Montrer que :

$$\|P\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

b) Démontrer que cela n'est plus vrai pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Partie B : Les polynômes de Tchebychev

Nous allons à présent montrer le théorème suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \Rightarrow \|P\|_{\infty} \geq \frac{|a_n|}{2^{n-1}} \text{ avec } a_n = CD(P)$$

Pour cela nous allons avoir besoin des polynômes de Tchebychev.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], T_n(x) = \cos(\arccos(x))$$

1) Déterminer T_0 et T_1 .

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in [-1; 1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale sur $[-1; 1]$.

c) Donner $T_2(X)$ et $T_3(X)$.

3) Déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

4) Déterminer la parité de T_n .

5) a) Démontrer que :

$$\forall \theta \in [0; \pi], T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

b) En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est scindé à racines simples puis déterminer les racines de T_n .

6) Montrer que $\|T_n\|_{\infty} = 1$.

Dans toute la suite on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

7) a) Montrer que V_n est unitaire.

b) Déterminer $\|V_n\|_{\infty}$.

Partie C : Minoration de $\|P\|_{\infty}$.

Dans cette partie on se donne $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et unitaire. On souhaite prouver que $\|P\|_{\infty} \geq 2^{1-n}$. Pour cela on va raisonner par l'absurde. On suppose que :

$$\|P\|_{\infty} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

1) Démontrer que $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

2) On pose :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

- a) Déterminer le signe de $(V_n - P)(x_k)$.
b) En déduire que $V_n = P$ puis conclure.

3) a) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \Rightarrow \|P\|_\infty \geq \frac{|a_n|}{2^{n-1}} \text{ avec } a_n = CD(P)$$

b) De plus déterminer tous les polynômes P_n de degré n tel que :

$$\|P_n\|_\infty = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

Partie D : Une magnifique application

Dans cette partie nous allons nous intéresser à ce que l'on appelle une interpolation. On se donne $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1; 1])$ et $n + 1$ antécédents $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in [-1; 1]^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

On dit que P_n est le polynôme d'interpolation de f d'ordre $n + 1$ pour le $(n + 1) - \text{uplet } (a_0, a_1, \dots, a_n)$ si :

$$\begin{cases} P_n \in \mathbb{R}_n[X] \\ \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_n(a_i) = f(a_i) \end{cases}$$

On définit alors $d_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(P_n, f)$ la distance entre P_n et f par :

$$d_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(P_n, f) = \|P_n - f\|_\infty$$

Le but de cette partie étant de trouver un excellent $(n + 1) - \text{uplet } (a_0, a_1, \dots, a_n)$ pour f , c'est-à-dire tel que $d_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(P_n, f)$ soit majorée par une suite qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On verra que ce $(n + 1) - \text{uplet}$ est indépendant de f .

Cela est très utile en physique, notamment pour les éphémérides astronomiques où l'on a besoin de réajuster une régression par exemple.

1) On pose $f: x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2}$ pour $x \in [-1; 1]$. Déterminer $d_{(-1, 0, 1)}(P_2, f)$.

2) Démontrer que :

$$\forall (a_0, a_1, \dots, a_n) \in [-1; 1]^{n+1} \text{ avec } a_0 < a_1 < \dots < a_n, \exists! P_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_n(a_i) = f(a_i)$$

Dans toute la suite on pose :

$$S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(X) = \prod_{k=0}^n (X - a_k)$$

De plus on pose $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_n(a_i) = f(a_i)$$

Enfin on pose :

$$\phi_\lambda: x \mapsto f(x) - P_n(x) - \lambda S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)$$

a) Démontrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exists t_\lambda \in [-1; 1] \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \text{ tel que } \phi_\lambda(t_\lambda) = 0$$

b) Montrer que ϕ_λ s'annule $n + 2$ fois sur $[-1; 1]$.

c) En déduire que $\phi_\lambda^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1; 1]$.

d) Déterminer $\phi_\lambda^{(n+1)}$ en fonction de $f^{(n+1)}, n$ et λ .

e) En déduire qu'il existe $a \in [-1; 1]$ tel que :

$$f(t_\lambda) - P(t_\lambda) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} S(t_\lambda)$$

3) a) En déduire que :

$$\forall x \in [-1; 1], |f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} |S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)|$$

b) Pour quelles valeurs de $(a_0, \dots, a_n) \in [-1; 1]^{n+1}$ la quantité $\|S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}\|_\infty$ est-elle minimale ?

On note $(t_0, \dots, t_n)$ ce $(n + 1) - \text{uplet}$ et P le polynôme associé

c) En déduire que :

$$\|P - f\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \times \frac{1}{2^{n-1}}$$

Partie A : Echauffement

1) On étudie f .

On a :

$$\forall x \in [-1; 1], f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x+3)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(1+x^2)^2}$$

On résout :

$$-2x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$$

On calcule :

$$\Delta = 9 + 4 = 13$$

On a alors :

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	-1	$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
f	↗ ↘		

On calcule ensuite :

$$|f(-1)| = \frac{1}{2}, |f(1)| = \frac{5}{2}, \left| f\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right) \right| = \frac{2\sqrt{13}}{13 - 3\sqrt{13}}$$

On en déduit donc que :

$$\|f\|_{\infty} = \frac{2\sqrt{13}}{13 - 3\sqrt{13}}$$

2) a) Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Donc $\|f\|_{\infty}$ existe.

b) De même comme f atteint ses bornes :

$$\exists c \in [-1; 1] \text{ tel que } \|f\|_{\infty} = |f(c)|$$

c) D'après le cours, on sait que :

$$f'(c) = 0$$

3) a) On a immédiatement :

$$P = 0_{\mathbb{R}[X]} \Rightarrow \|P\|_{\infty} = 0$$

De plus on a :

$$\|P\|_{\infty} = 0 \Rightarrow \forall x \in [-1; 1], P(x) = 0$$

Ainsi P admet une infinité de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

b) Il suffit de poser :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x+1| + |x-1| - 2$$

Partie B : Les polynômes de Tchebychev

1) On a :

$$\forall x \in [-1; 1], T_0(x) = \cos(0) = 1$$

$$\forall x \in [-1; 1], T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$$

2) a) On a :

$$\begin{aligned} & \forall x \in [-1; 1], 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \\ &= 2x \cos((n+1)\arccos(x)) - \cos(n\arccos(x)) \\ &= 2 \cos(\arccos(x)) \cos((n+1)\arccos(x)) - \cos(n\arccos(x)) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\forall x \in [-1; 1], 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) &= \cos((n+2)\arccos(x)) + \cos(n\arccos(x)) - \cos(n\arccos(x)) \\ &= \cos((n+2)\arccos(x)) \\ &= T_{n+2}(x)\end{aligned}$$

b) On effectue une récurrence double.

On pose :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n = "T_n \text{ est une fonction polynomiale sur } [-1; 1]"$.

Initialisation : $n = 0 \text{ et } n = 1$

On a vu précédemment que :

$$\forall x \in [-1; 1], T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

Donc en posant :

$$T_0(X) = 1 \text{ et } T_1(X) = X$$

On a bien $\mathcal{P}_0 \text{ et } \mathcal{P}_1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose vraie $\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}$.

On a alors :

$$\forall x \in [-1; 1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

On a donc :

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

Par combinaison linéaire et produit, T_{n+2} est un polynôme. Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence double.

c) On a :

$$T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1$$

De même on a :

$$T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$$

3) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n = " \deg(T_n) = n \text{ et } CD(T_n) = 2^{n-1} "$$

Initialisation $n = 1 \text{ et } n = 2$

On a :

$$T_1(X) = X \text{ et } T_2(X) = 2X^2 - 1$$

Ainsi $\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}$. On sait de plus que :

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

On sait de plus que :

$$\deg(T_{n+1}) = n + 1 \text{ et } \deg(T_n) = n$$

On a donc :

$$\deg(2XT_{n+1}(X) - T_n(X)) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n + 2$$

De même on a :

$$CD(T_{n+2}) = 2CD(T_{n+1}) = 2^{n+1}$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion : On conclut par le principe de récurrence double.

Il faut rajouter que **$\deg(T_0) = 0 \text{ et } CD(T_0) = 1$** .

4) D'après les premières observations, nous pouvons constater que T_n est paire si n est pair, et T_n impaire si n impair. Nous allons démontrer cela par récurrence double en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = "T_{2n} \text{ est paire et } T_{2n+1} \text{ est impaire.}"$$

Initialisation : $n = 0 \text{ et } n = 1$.

On a $T_0(X) = 1 \text{ et } T_1(X) = X$ sont cela est immédiat, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n . On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

On a alors :

$$T_{2n+2}(X) = 2XT_{2n+1}(X) - T_{2n}(X)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_{2n+2}(-x) = 2(-x)T_{2n+1}(-x) - T_{2n}(-x) = 2xT_{2n+1}(x) - T_{2n}(x)$$

D'après l'hypothèse de récurrence.

On en déduit donc que T_{2n+2} est paire.

De même on a :

$$T_{2n+3}(-x) = 2(-x)T_{2n+2}(-x) - T_{2n+1}(-x) = 2(-x)T_{2n+2}(x) + T_{2n+1}(x) = -(2(x)T_{2n+2}(x) - T_{2n+1}(x))$$

Ainsi :

$$T_{2n+3}(-x) = -T_{2n+3}(x)$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après l'hypothèse de récurrence.

5) a) Là encore on doit faire une récurrence double.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{Q}_n = "\forall \theta \in [0; \pi], T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)"$$

Initialisation : $n = 0$ et $n = 1$

On a :

$$\forall \theta \in [0; \pi], T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(\theta)^0$$

$$\forall \theta \in [0; \pi], T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$$

On en déduit donc que $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose vraies $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$. On sait de plus que :

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0; \pi], T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence double.

b) On résout :

$$T_n(x) = 0$$

Or on sait que :

$$\forall x \in [-1; 1], \exists! \theta_x \in [0; \pi[\text{ tel que } x = \cos(\theta_x)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} T_n(x) = 0 \\ x \in [-1; 1] \end{cases} &\Leftrightarrow T_n(\theta_x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta_x) = 0 \Leftrightarrow n\theta_x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ &\Leftrightarrow \theta_x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \end{aligned}$$

De plus on sait que $x \mapsto \cos(x)$ est bijective sur $[0; \pi]$. On a ainsi n racines distinctes. Or T_n est de degré n donc on en déduit que :

$$\text{Rac}(T_n) = \left\{ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$$

De plus toutes les racines sont simples.

6) On sait que :

$$\|T_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1; 1]} |T_n(x)|$$

De plus on sait que :

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [-1; 1], T_n(x) = T_n(\cos(\theta_x)) = \cos(n\theta_x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [-1; 1], |T_n(x)| \leq 1$$

De plus on a :

$$T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0) = 1$$

On en déduit donc que :

$$\|T_n\|_\infty = 1$$

7) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(V_n) = \deg(T_n) = n \text{ et } CD(V_n) = \frac{1}{2^{n-1}} CD(T_n) = 1$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1; 1], V_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \\ \Rightarrow \forall x \in [-1; 1], |V_n(x)| &= \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Or } V_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(1)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

On a donc :

$$\|V_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Partie C : Minoration de $\|P\|_\infty$.

1) On sait que V_n est de degré n et unitaire. Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} v_{n,k} X^k$$

De même on a :

$$P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n(X) - P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{n,k} - p_k) X^k$$

Ainsi $\deg(V_n - P) \leq n - 1$.

2) a) On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, V_n(x_k) &= 2^{1-n} T_n(x_k) = 2^{1-n} \cos(n \arccos(x_k)) = 2^{1-n} \cos\left(\frac{nk\pi}{n}\right) = 2^{1-n} \cos(k\pi) \\ &= (-1)^k 2^{1-n} \text{ car } \frac{k\pi}{n} \in [0; \pi] \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, V_n(x_k) - P(x_k) = (-1)^k 2^{1-n} - P(x_k)$$

Or on sait que :

$$P(x_k) < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ car } \|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, V_n(x_k) - P(x_k) > \frac{1}{2^{n-1}} ((-1)^k - 1)$$

On a donc :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, V_n(x_k) - P(x_k) > 0 \text{ si } k \text{ est pair.}$$

De plus si k est impair on a :

$$(-1)^k 2^{1-n} - P(x_k) < (-1)^k 2^{1-n} + 2^{1-n} < 0$$

On a donc :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \begin{cases} V_n(x_k) - P(x_k) > 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ V_n(x_k) - P(x_k) < 0 \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$$

b) On sait que :

$$\deg(V_n - P) \leq n - 1$$

De plus on sait d'après la question précédente que $V_n - P$ change de signe sur $]x_k, x_{k+1}[$, $\forall k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$.

On applique alors le TVI sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, et cela nous donne $\{c_0, \dots, c_{n-1}\}$ n racines distinctes de $V_n - P$. Comme $\deg(V_n - P) \leq n - 1$, cela n'est possible que si $V_n - P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi on a $V_n = P$.

Cela est impossible car

$$\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } \|V_n\|_\infty = 1$$

On en déduit donc que si P est unitaire et de degré n :

$$\|P\|_{\infty} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

3) a) Soit P un polynôme de degré n , et $a_n \neq 0$ son coefficient dominant. On sait que :

$$\forall x \in [-1; 1], P(x) = a_n Q(x)$$

Avec Q un polynôme de degré n unitaire. On en déduit donc que :

$$\|Q\|_{\infty} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in [-1; 1], |P(x)| = |a_n| |Q(x)|$$

On en déduit donc que :

$$\|P\|_{\infty} \geq \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

b) On sait que le polynôme V_n vérifie :

$$\|V_n\|_{\infty} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \|\lambda V_n\|_{\infty} = \frac{|\lambda|}{2^{n-1}} = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

Montrons que c'est les seuls. Soit P_n un polynôme de degré n tel que :

$$\|P_n\|_{\infty} = \frac{CD(P_n)}{2^{n-1}}$$

On pose :

$$Q_n(X) = \frac{1}{CD(P_n)} P_n(X)$$

Ainsi Q_n est unitaire et de degré n , avec $\|Q_n\|_{\infty} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

On pose de la même façon que précédemment :

$$R_n = V_n - Q_n$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que $Q_n \neq V_n$

On a alors :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, R_n(x_k) = V_n(x_k) - Q_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - Q_n(x_k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} - Q_n(x_k) & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{1}{2^{n-1}} - Q_n(x_k) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

Si on suppose que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, R_n(x_k) \neq 0$, de la même façon que précédemment, on aurait alors n racines pour R_n en appliquant le TVI sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$. Comme $R_n \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, cela est impossible.

Cependant les intervalles se chevauchent en $x_k, 1 \leq k \leq n-1$, donc on peut perdre certaines racines par rapport à la question précédente. Mais on a :

Si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et $R_n(x_k) = 0$, alors $(R_n)'(x_k) = 0$ et donc x_k est racine double

Ainsi sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ et $[x_{k+1}, x_{k+2}]$, nous avons au moins deux racines, soit double en x_{k+1} , soit strictement incluses dans chaque intervalle. Ainsi R_n admet au moins n racines, donc $R_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Ainsi $P_n = V_n$. On en déduit donc que :

$\deg(Q) = n$ et $\|Q\|_{\infty} = c$, alors $Q_n(X) = \pm c T_n(X)$.

Partie D : Une magnifique application

1) On a :

$$f: x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2} \text{ et } (a_0, a_1, a_2) = (-1, 0, 1)$$

Ainsi on cherche le polynôme de degré inférieur ou égale à 2 tel que :

$$P_2(-1) = f(-1) = \frac{1}{2}, P(0) = f(0) = 3 \text{ et } P(1) = f(1) = \frac{5}{2}$$

On peut le faire très rapidement avec les polynômes d'interpolation de Lagrange. On peut aussi résoudre le système :

$$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ c = 3 \\ a + b + c = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$P(X) = -\frac{3}{2}X^2 + 1X + 3$$

On pose ensuite :

$$e_1: x \mapsto \frac{2x+3}{1+x^2} - \left(-\frac{3}{2}x^2 + 1x + 3\right)$$

On cherche alors le maximum de $|e_1|$ sur $[-1; 1]$.

Je m'excuse, je n'avais pas fait les calculs avant et c'est très difficile de trouver le maximum de $|e_1|$.

2) a) On doit démontrer l'existence et l'unicité.

Existence : Là on peut le faire avec les polynômes de Lagrange.

On pose :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(X - a_j)}{(a_j - a_i)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \deg(L_i) &= n \\ \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, L_i(a_j) &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Ainsi on pose :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n f(a_i) L_i(X)$$

On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(a_i) = f(a_i) \text{ et } \deg(P) \leq n$$

Unicité : On suppose qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, Q(a_i) = f(a_i) \text{ et } \deg(Q) \leq n$$

On pose :

$$R(X) = P(X) - Q(X)$$

On a :

$$\deg(R) \leq n$$

De plus on a :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, R(a_i) = 0$$

Ainsi R admet au moins $n + 1$ racines distinctes et $\deg(R) \leq n$. Donc $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On a donc **$P = Q$** .

3) a) On définit :

$$\forall x \in [-1; 1], \phi_\lambda(x) = f(x) - P_n(x) - \lambda S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)$$

On a alors :

$$\forall x \in [-1; 1] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}, \lambda = \frac{\phi_\lambda(x) - (f(x) - P_n(x))}{S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)}$$

Ainsi en posant :

$$x_0 \in [-1; 1] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}, \lambda_0 = \frac{(f(x_0) - P_n(x_0)) - \phi_\lambda(x_0)}{S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x_0)}$$

On a :

$$\forall x \in [-1; 1], \phi_\lambda(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{(f(x_0) - P_n(x_0)) - \phi_\lambda(x_0)}{S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x_0)} \times S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)$$

On a alors :

$$\phi_\lambda(x_0) = 0$$

b) ϕ_λ s'annule pour $x \in \{a_0, \dots, a_n\} \cup \{x_0\}$ donc ϕ_λ s'annule au moins $n + 2$ fois sur $[-1; 1]$.

c) On applique le théorème de Rolle pour $(\phi_\lambda)'$ et on obtient que ϕ_λ s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[-1; 1]$.

En réitérant le procédé pour chaque dérivé, on obtient que $\phi_\lambda^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois.

d) On sait que $\deg(P) \leq n$

Ainsi on a :

$$P^{(n+1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

De plus on a : $\deg(S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}) = n + 1$ donc :

$$S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}^{(n+1)} = (n+1)! CD \left((S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}) \right) = (n+1)!$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in [-1; 1], \phi_\lambda^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)! \lambda$$

On a alors :

$$\forall x \in [-1; 1], \lambda = \frac{-\phi_\lambda^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

En posant a tel que $\phi_\lambda^{(n+1)}(a)$ s'annule. On a démontré précédemment l'existence de a .

On a alors :

$$\forall x \in [-1; 1], \phi_\lambda(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{-f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \times S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)$$

En posant t_λ définit précédemment, on a :

$$f(t_\lambda) - P(t_\lambda) = \phi_\lambda(t_\lambda) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} S(t_\lambda) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} S(t_\lambda)$$

3) a) On a vu précédemment que l'on avait trouvé t_λ arbitrairement, comme un élément de $[-1; 1] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$.

Ainsi on a :

$$\forall t \in [-1; 1] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}, \exists a_t \in [-1; 1] \text{ tel que } f(t) - P(t) = \frac{f^{(n+1)}(a_t)}{(n+1)!} S(t)$$

L'égalité reste vraie pour $t \in \{a_0, \dots, a_n\}$. On en déduit donc que :

$$\forall t \in [-1; 1], \exists a_t \in [-1; 1] \text{ tel que } f(t) - P(t) = \frac{f^{(n+1)}(a_t)}{(n+1)!} S(t)$$

On a donc :

$$\forall x \in [-1; 1], |f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} |S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}(x)|$$

b) On sait que $\|S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ et $\|S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)}\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$ pour $S_{(a_0, a_1, \dots, a_n)} = V_n$.

c) On a alors :

$$\forall x \in [-1; 1], |f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} |V_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \times \frac{1}{2^{n-1}}$$

C'est donc bien les polynômes de Tchebychev qui donne la meilleure approximation par cette méthode.

Cela dépend bien sûr de f car si f est déjà polynomiale de degré inférieur ou égale à n , f est bien sûr sa meilleure approximation. Ceci est une méthode générale !