

TD 20 : Intégration

Partie A : Fonction en escalier

Exercice A.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} [0; 4] \rightarrow \{-2; -1; 1; 3; 4\} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases} \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f .

2) Calculer $\int_0^4 f(t)dt$

Partie B : Propriétés de l'intégrale

Exercice B.1 : Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

Montrer que f s'annule sur $[a; b]$.

Exercice B.2 : Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$$

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

b) Montrer qu'il existe $x_1 \in [0; 1]$ tel que $f(x_1) = 0,5$

Exercice B.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue) : Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$$

Exercice B.4 : Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\exists c \in [a; b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

Exercice B.5 : Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

On pose :

$$F: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \end{cases}$$

Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$$

Partie C : Calcul de primitive et d'intégrale

Exercice C.1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$$

Exercice C.2 : Calculer :

$$\int \frac{dt}{it + 1} \text{ et } \int e^t \cos(t) dt$$

Exercice C.3 (Centrale PSI) : Démontrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad \int_{-1}^1 Q(t) dt = -i \int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

Exercice C.4 : Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer :

$$I_{k,p} = \int_0^\pi \cos(kt) \cos(pt) dt, \quad I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*), \quad I = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt$$

Exercice C.5 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

Exercice C.6 : Calculer :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \quad ; \quad \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

Exercice C.7 : 1) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$$

2) En déduire :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}$$

Partie D : Somme de Riemann

Exercice D.1 : Calculer la limite de:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}; \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$$

Exercice D.2 : Calculer la limite de:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}}; \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + 3 \times \frac{k}{n}}$$

Exercice D.3 : Calculer la limite de:

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} ; v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice D.4 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - T_n(f) \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| \times \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

En posant :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right)}{2}$$

Partie E : Fonction définie par une intégrale

Exercice E.1 : Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)^2} dt$$

Exercice E.2 : Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

Exercice E.3 : On pose :

$$\forall x > 0, f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

a) Montrer que :

$$\forall x > 1, |f(x)| \leq \frac{2}{x}$$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Déterminer la limite de f en 0^+ .

d) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer $f'(x)$.

Exercice E.4 : On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

a) Déterminer la parité de f .

b) Démontrer que f est dérivable et déterminer $f'(x)$.

c) Déterminer les limites de f à ses bornes.

Exercice E.5 : On étudie dans ce problème la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

La courbe représentative de F sera notée Γ .

1) a) Déterminer le signe de F sur $]0; +\infty[$.

b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $]0; +\infty[$.

c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$. En déduire les variations de F .

d) Ecrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2) Montrer que :

$$\forall x > 0, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

3) a) Soit Φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \Phi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que :

$$\forall x > 0, F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \Phi(t) dt$$

c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. Que peut-on en déduire de l'allure de Γ en $+\infty$?

d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0. Que peut-on en déduire de l'allure de Γ au point d'abscisse 0 ?

4) Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

On pose :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[, I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt$$

a) Calculer $I_k(x)$ pour tout $(k, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[$.

b) Montrer que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

c) En déduire que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; 1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k(x) \right| < I_{2n+2}(x)$$

d) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

e) Donner, en détaillant la méthode utilisée, une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-2} .

5) Tracer l'allure de la courbe Γ .